

Durée : 4h

Corrigé

Sujet de Chimie

1. Réactions de formation de complexes métalliques — (25 minutes)

1. 1 Une solution contient par litre 0,040 mol de nitrate d'argent $NO_3^- + Ag^+$ et 1 mol d'ammoniaque NH_3 . On négligera l'action de l'eau sur l'ammoniaque NH_3 . Donner l'équation de formation du complexe.

$$K_1 = K_{d[Ag(NH_3)_2^+]} = 6,0 \cdot 10^{-8}$$

Pour la formation du complexe à partir de l'ion métallique, on a simplement $Ag^+ + 2NH_3 = Ag(NH_3)_2^+$. La

constante associée est $K_f = \frac{(Ag(NH_3)_2^+)}{(Ag^+)(NH_3)^2} = \frac{1}{K_{d[Ag(NH_3)_2^+]}} = 1,67 \cdot 10^7 \gg 1$.

1. 2 Calculer la concentration molaire de chacune des espèces à l'équilibre.

La constante précédente est grande donc la réaction peut être considérée comme totale.

	Ag^+	$2NH_3$		$Ag(NH_3)_2^+$
Initialement (en mol. L^{-1})	0,04	1,0	0	0
Equilibre (en mol. L^{-1})	ε	$1,0 - 2x$ $= 0,92$	x $= 0,04$	$x = 0,04$

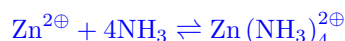
On a donc $K_f = \frac{(Ag(NH_3)_2^+)}{(Ag^+)(NH_3)^2} = \frac{0,04}{\varepsilon \times (0,92)^2} = 1,67 \cdot 10^7$ qui permet de calculer la dernière concentration $[Ag^+] = \varepsilon = 2,83 \cdot 10^{-9} \text{ mol} \cdot L^{-1}$

1. 3 Dans une solution de chlorure de zinc $Zn^{2+} + 2Cl^-$ de concentration $C_1 = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ on ajoute de l'ammoniaque de concentration $C_1 = 1,0 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ (sans variation de volume). Dans ces conditions il se forme le complexe tetraminezinc II : $Zn(NH_3)_4^{2+}$

Remarque : on négligera l'action de l'eau sur l'ammoniaque.

A l'équilibre on a : $[Zn^{2+}] = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot L^{-1}$. Donner l'équation de formation de ce complexe.

Visiblement, il n'y a pas de complexes successifs intermédiaires et on a directement :



et la constante d'équilibre associée est $K_f = \frac{(Zn(NH_3)_4^{2+})}{(Zn^{2+})(NH_3)^4}$

1. 4 Calculer $K_2 = K_f$ la constante de formation de ce complexe.

On va supposer, puisque : $[Zn^{2+}] = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot L^{-1}$, que la constante a une valeur élevée et que la réaction est donc totale :

	Zn^{2+}	$4NH_3$	$Zn(NH_3)_4^{2+}$
Initialement (en mol. L^{-1})	$1,0 \cdot 10^{-2}$	1,0	0
Equilibre (en mol. L^{-1})	ε $= 1,0 \cdot 10^{-12}$	$1,0 - 4x$ $= 0,96$	x $= 1,0 \cdot 10^{-2}$

On en déduit donc directement la valeur numérique de la constante :

$$K_f = \frac{1,0 \cdot 10^{-2}}{1,0 \cdot 10^{-12} \times (0,96)^4} = 1,18 \cdot 10^{10} \gg 1$$

2. Dosage : étude d'un protocole expérimental — (35 minutes)

L'acide éthylène diammine tétracétique noté YH_4 est un tétraacide, dont la tétrabase $\text{Y}^{4\ominus}$ peut former un complexe $[\text{NiY}]^{2\ominus}$ avec l'ion $\text{Ni}^{2\oplus}$. On peut envisager un dosage des ions $\text{Ni}^{2\oplus}$ selon le protocole suivant : dans un erlenmeyer de 150 mL, introduire, en respectant l'ordre, afin que les ions $\text{Ni}^{2\oplus}$ soient complexés par l'EDTA (introduit en excès) et non par l'indicateur coloré (le noir ériochrome T [noté NET]), $V_{\text{Ni}} = 20,0 \text{ mL}$ d'une solution de chlorure de nickel(II) de concentration **inconnue** C_{Ni} ainsi que $V_{\text{Y}} = 30,0 \text{ mL}$ de la solution de $\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$ de concentration $C_{\text{Y}} = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$ et 5 mL de solution tampon ammoniacal à $\text{pH} = 10$

On dilue à 75 mL **environ** avec de l'eau distillée.

On ajoute une pastille d'indicateur de noir ériochrome T.

On effectue ensuite le dosage par une solution de chlorure de magnésium de concentration $C_{\text{Mg}} = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol/L}$.

Le noir ériochrome T (NaH_2Ind) donne un diacide ($\text{H}_2\text{Ind}^\ominus$) dont la base conjuguée $\text{Ind}^{3\ominus}$ forme un complexe coloré avec les ions magnésium (II) $\text{Mg}^{2\oplus}$, complexe rouge foncé.

$\text{H}_2\text{Ind}^\ominus$: rouge ; $\text{HInd}^{2\ominus}$: bleu ; $\text{Ind}^{3\ominus}$: orange.

complexe	$[\text{MgY}]^{2\ominus}$	$[\text{NiY}]^{2\ominus}$	$[\text{MgIndY}]^\ominus$
$\log \beta$	8,7	18,6	7,0

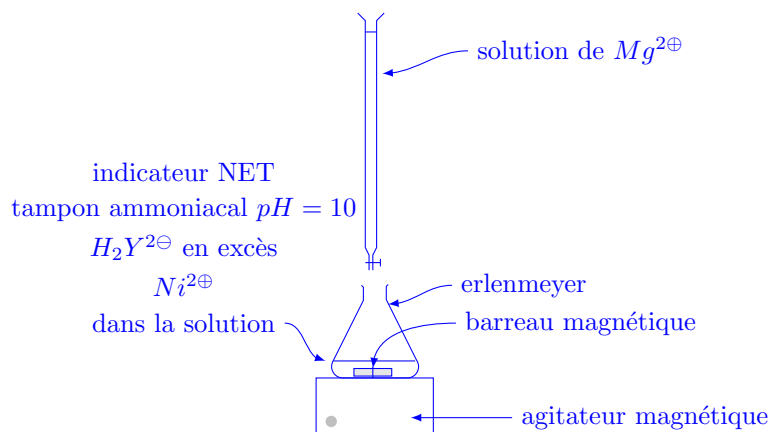
Constantes d'acidité K_a :

H_4Y : $\text{pK}_{a1} = 2,0$; $\text{pK}_{a2} = 2,7$; $\text{pK}_{a3} = 6,2$; $\text{pK}_{a4} = 10,3$

H_3Ind : $\text{pK}_{a1} = 3,9$; $\text{pK}_{a2} = 6,4$; $\text{pK}_{a3} = 11,5$

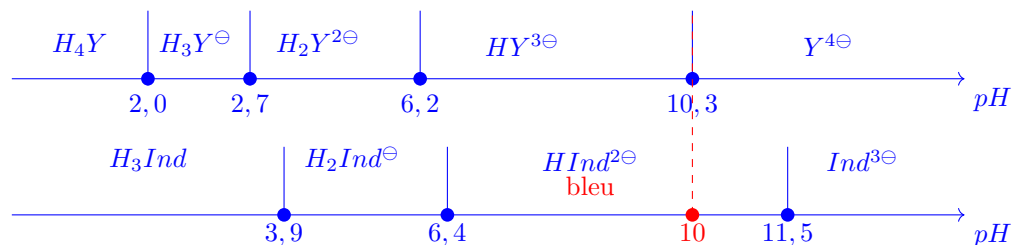
NH_4^\oplus : $\text{pK}_a = 9,2$

2. 1 Faire le schéma symbolique précis du montage



On notera que le fait de diluer à un volume approximatif interdit de faire nos calculs ultérieurs avec les concentrations, donc il faudra raisonner en quantité de matière n .

2. 2 Tracer le diagramme de prédominance acido-basique des différentes formes acido-basiques de l'EDTA et du noir ériochrome T en fonction du pH. A $\text{pH} = 10$, indiquer l'espèce prédominante pour l'EDTA et le NET.



Le pH imposé à 10 implique que la forme du NET, qui n'a donc pas réagit avec $\text{H}_2\text{Y}^{2\ominus}$, donne une couleur bleue initiale.

Par contre, il faut bien comprendre que le complexe $\text{NiY}^{2\ominus}$ a été formé dans l'erlenmeyer AVANT le début du dosage, en consommant une partie du $\text{H}_2\text{Y}^{2\ominus}$ versé initialement en excès, ce qui signifie que la totalité de $\text{Ni}^{2\oplus}$ a disparu puisque la constante de formation est élevée.

2. 3 Ecrire l'équation de la réaction correspondante.

On va donc supposer que le tampon à $\text{pH} = 10$ a imposé que la réaction dans l'erlenmeyer a eu lieu plus probablement entre $\text{Ni}^{2\oplus}$ et le plus probable $\text{HY}^{3\ominus}$:



On a ajouté dans le bilan la présence de l'ammoniaque qui assure le tampon, car c'est le milieu qui va récupérer le proton libéré par $HY^{3\ominus}$ lors de la formation du complexe. En effet, NH_3 est une base plus forte que H_2O

La constante de cette réaction initiale est $K = \beta_{Ni} \frac{K_{a4}}{K_a} = 3,2 \cdot 10^{+17} \gg 1$

2. 4 Initialement l'EDTA est en excès par rapport aux ions $Ni^{2\oplus}$. En déduire l'équation de la réaction de dosage et calculer sa constante d'équilibre.

Comme l'EDTA est en excès, on a formé du $NiY^{2\ominus}$ en consommant tout $Ni^{2\oplus}$. La constante de réaction entre $NiY^{2\ominus}$ et $Mg^{2\oplus}$ est faible car égale à $10^{-18,6+8,7} = 10^{-9,9}$. Cela signifie que le complexe est stable en présence de $Mg^{2\oplus}$. La réaction de dosage va donc avoir lieu entre $Mg^{2\oplus}$ et l'EDTA $HY^{3\ominus}$:



La constante associée à cette réaction est $K_2 = \beta_{Mg} \frac{K_{a4}}{K_a} = 4 \cdot 10^7 \gg 1$ donc la réaction de dosage est totale, ce qui est une condition pour pouvoir réaliser un dosage.

2. 5 Indiquer le changement de couleur observé à l'équivalence et préciser s'il convient de repérer le début ou la fin du virage de l'indicateur pour pouvoir en déduire la concentration C_{Ni} .

On a dit que la solution est initialement de couleur **bleue**. L'excès d'EDTA est ensuite dosé par $Mg^{2\oplus}$ et quand l'équivalence est atteinte, on aura dans le bécher du $Mg^{2\oplus}$ libre qui pourra alors réagir avec l'indicateur NET pour former le complexe de couleur **rouge**. Il faut bien sûr mesurer le volume équivalent au virage de couleur et ne pas attendre la consommation totale du NET

2. 6 En déduire C_{Ni} littéralement ~~puis numériquement~~.

A l'équivalence : $n(EDTA)_{excès} = V_E C_{Mg}$. De plus $n(EDTA)_{initial} = V_Y C_Y$
 et $n(Ni^{2+}) = n(EDTA)_{initial} - n(EDTA)_{excès}$
 et pour finir $C_{Ni} = n(Ni^{2+})/V_{Ni}$

2. 7 Expliquer pourquoi le titrage ne pouvait pas être réalisé en utilisant un tampon à pH = 5 ou à pH = 12.

A pH = 5 la forme de l'indicateur coloré est rouge, comme la teinte du complexe $MgIndY^{\ominus}$ et A pH = 12 la forme de l'indicateur coloré est orange, couleur proche la teinte du complexe $MgIndY^{\ominus}$.

FIN de la CHIMIE

Sujet de Physique

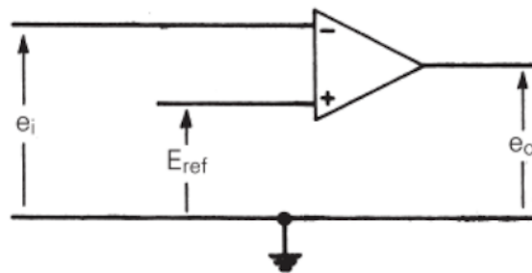
3. Montages à ALI : instrumentation — inspiré de sujets E3A CCINP et aussi Mines ré-adaptés au programme de PSI actuel après la réforme de 2021 — (180 minutes)

Les ALI utilisés sont idéaux. Ils sont en fonctionnement linéaire ou saturé selon le cas. Ils sont alimentés par du $\pm 15\text{ V}$ mais ces connections ne sont pas représentées. Les représentations des ALI sous forme de triangle (anciens sujets) ou de rectangle sont équivalentes.

Le sujet est progressif en difficultés

Certaines questions peuvent être abordées indépendamment des résultats précédents

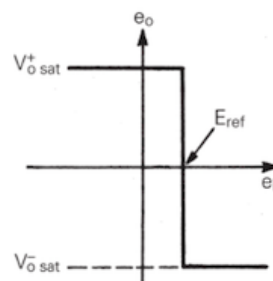
1 On note $e_i = E \cos(\omega t)$ la tension d'entrée d'un montage qui ne comporte qu'un ALI sans rétro-action. Cette tension sera appliquée à la borne inverseuse. L'ALI est caractérisé par un gain propre $\mu \approx \infty$



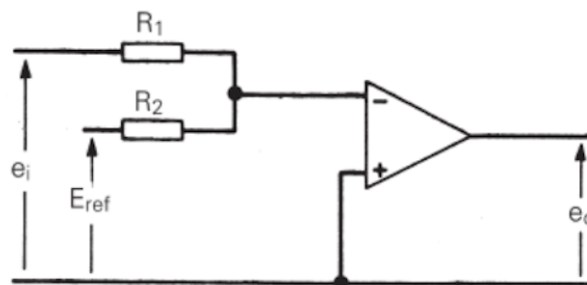
On impose une tension constante E_{ref} positive sur la borne non inverseuse de l'ALI. Expliquer pourquoi $e_o = \pm V_{sat}$, avec $V_{sat} = 15\text{ V}$.

Le circuit ne comporte pas de rétroaction sur \ominus donc $e_o = \mu(V_+ - V_-)$ avec $\mu = \infty$ donne donc une tension qui va dépasser la saturation donc on sature à $\pm V_{sat}$

2 Représenter e_o en fonction de e_i



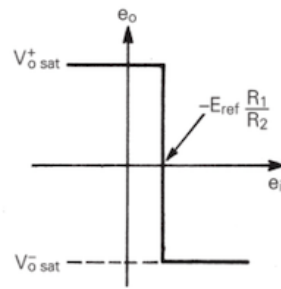
3 Sur le schéma ci-dessous, on utilise différemment la tension de référence E_{ref} : nous avons donc maintenant deux tensions sur la borne inverseuse comme représenté. La borne non inverseuse est reliée à la masse.



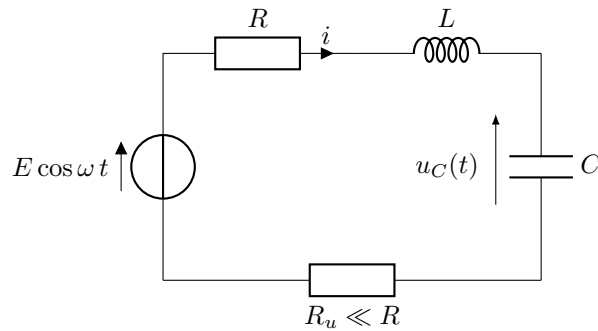
Montrer comment le résultat précédent a été modifié. Tracer pour cela e_o en fonction de e_i dans ce nouveau cas en le superposant au tracé précédent.

e_o est positif si $\epsilon > 0$ donc si $V_+ - V_- > 0$. On a $V_+ = 0$ et $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_- = \left(\frac{e_i}{R_1} + \frac{E_{ref}}{R_2}\right)$

On a donc $\epsilon > 0$ si $e_i < -E_{ref} \frac{R_1}{R_2}$ ce qui donne le tracé suivant



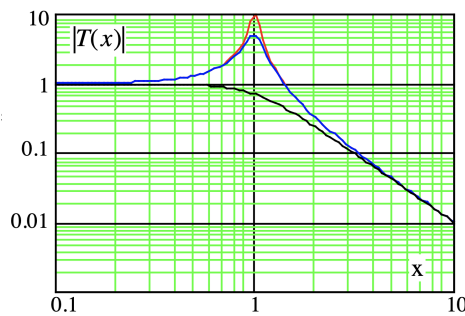
- 4 On étudie un circuit RLC série alimenté par un GBF assurant $e(t) = E \cos \omega t$. On mesure la tension u_C aux bornes du condensateur.



Etablir l'expression de la fonction de transfert $H_1 = \frac{u_C}{e}$ en supposant que $R_u \ll R$
 $E \cos \omega t = u_C + u_L + u_R = u_C + L \frac{di}{dt} + R_i i$ donc et on a un diviseur de tension

$$H(x) = \frac{1}{1 - (LC\omega)^2 + jRC\omega}$$

- 5 Tracer le diagramme de Bode du filtre réalisé en tenant compte de la possibilité de cas différents



On a deux catégories pour ce passe-bas du 2e ordre : avec ($G > 1$) ou sans résonance ($G < 1$)

- 6 Quel est le facteur de qualité Q de ce filtre ? L'exprimer en fonction des notations littérales de ce circuit (R , L , C , ...).

On prend une forme canonique qui correspond à Q variant en $1/R$ afin de bien tenir compte du fait que la résonance a lieu pour des R faibles

$$H(x) = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \text{ avec par identification } LC\omega_0^2 = 1 \text{ et } Q = L\omega_0/R =$$

- 7 Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le courant i .

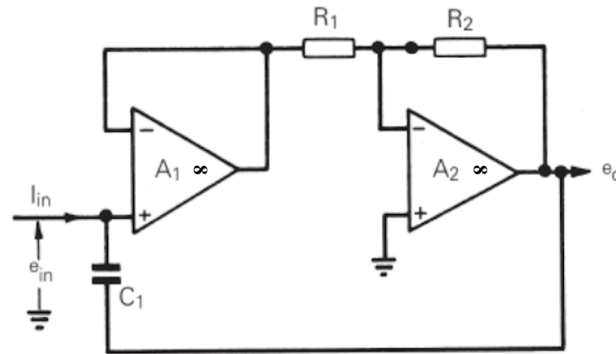
$$C \frac{du_e}{dt} = i + RC \frac{di}{dt} + LC \frac{d^2 i}{dt^2}$$

avec $i = C \frac{du_c}{dt}$

8 Quelle est la forme de la solution de cette équation différentielle ?

Le régime permanent i_{RP} est sinusoïdal de pulsation ω et le régime transitoire i_{RT} est la solution de l'équation différentielle sans second membre : $i_{RT} = A \cos(\Omega t + \varphi) e^{-\lambda t}$ en posant $\omega_0^2 = 1/LC$, $2\lambda = RC$ et $\Omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$ quand on est dans le cas $\omega_0 > \lambda$

9 On cherche à modifier le facteur de qualité Q du montage RLC série : ainsi, on veut remplacer la résistance R_u par le circuit à ALI suivant. Les ALI sont en fonctionnement linéaire.



Montrer que l'on peut établir la relation suivante :

$$I_{in} = \frac{e_{in}}{Z}$$

Exprimer cette impédance d'entrée du montage Z en fonction de ω , C_1 , R_1 et R_2 .

On va exploiter le fait que le courant est le même dans R_1 et dans R_2 (d'ailleurs, c'est le courant de sortie du 1er ALI) :

$$(E1) \quad i(R_1) = \frac{V_{1,\oplus} - V_{2,\oplus}}{R_1} = i(R_2) = \frac{V_{2,\oplus} - e_o}{R_2}$$

On suppose de plus que les ALI fonctionnent en régime linéaire comme indiqué dans l'énoncé, donc (E2) $V_{1,\oplus} = V_{1,\ominus} = e_{in}$ et $V_{2,\oplus} = V_{2,\ominus} = 0$. Pour finir, on exploite le fait que le courant I_{in} est celui qui va traverser C_1 donc

$$(E3) \quad I_{in} = \frac{e_{in} - e_o}{Z_{C_1}}$$

Avec ces remarques, on peut déduire $\frac{e_{in} - 0}{R_1} = \frac{-e_o}{R_2}$ donc $I_{in} = e_{in} \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{Z_{C_1}}$ ce qui signifie que

$$1/Z = jC_1\omega \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}$$

Remarquons que l'on a un circuit équivalent à un condensateur équivalent $C_e = C_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$

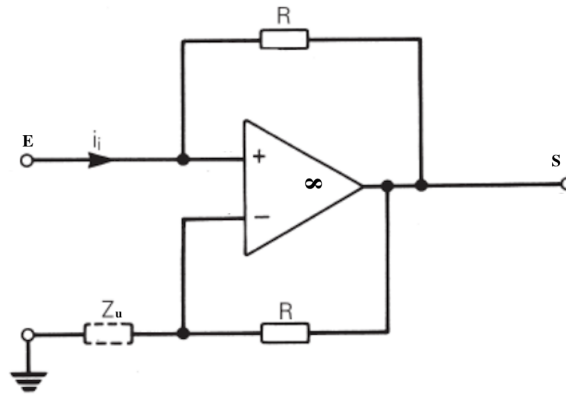
10 Expliquer comment le remplacement symbolique de R_u dans le circuit RLC précédent par cette impédance simulée Z permet de changer facilement son facteur de qualité Q .

Le facteur de qualité Q vérifie $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ donc l'ajout du montage à la place de R_u permet d'ajouter un condensateur équivalent $C_e = C_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$ en série avec C . Cela permet donc d'avoir un circuit avec R , L et une capacité $\frac{C_1 C}{C_1 + C}$ ce qui permet donc de faire varier Q grâce à C_e .

11 Si le circuit à ALI qui remplace R_u n'était le précédent mais un montage simulant une résistance négative notée $Z_n = -R_n$, discuter de la stabilité des solutions de l'équation différentielle déjà citée pour le circuit RLC.

En remplaçant R_u par un montage simulant $-R_n$, le circuit va correspondre à une équation différentielle $C \frac{du_e}{dt} = i + (R - R_n)C \frac{di}{dt} + LC \frac{d^2 i}{dt^2}$ avec $i = C \frac{du_c}{dt}$. La solution ne sera pas stable si $R_n > R$.

12 Montrer comment le circuit suivant permet de répondre à cette volonté de créer une résistance négative entre E et la masse. : quelle doit être l'impédance Z_u dans ce cas ?

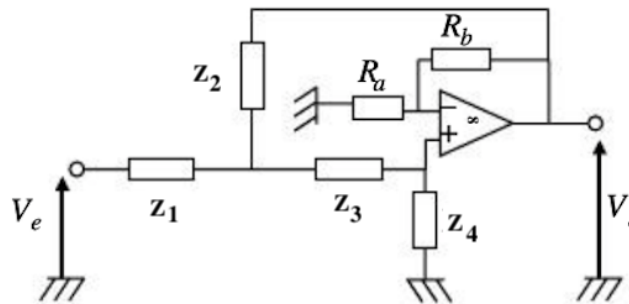


On écrit $s = V_E \frac{R + Z_u}{Z_u}$ en appliquant le diviseur de tension pour Z_u et R . D'autre part, pour la rétroaction sur \oplus ,

on peut écrire la loi d'Ohm $i_i = \frac{V_E - s}{R}$ avec $V_E = V_\ominus = \frac{Z_u}{Z_u + R} s$

On a donc $i_i = \frac{e_i - \frac{e_i(R+Z)}{Z}}{R} = \frac{e_i(1 - \frac{R+Z}{Z})}{R}$ donc d'impédance d'entrée est $Z_i = \frac{e_i}{i_i} = \frac{ZR}{Z - R - Z}$ donc $Z_i = -Z$ qui donne bien une impédance négative. Il suffit donc que Z_u soit une résistance R

13 La bobine d'induction L utilisée dans le filtre RLC série a un inconvénient majeur : sa taille. On propose donc de miniaturiser un montage dont le comportement peut se rapprocher de celui du RLC, mais sans comporter d'inductance L , comme représenté ci-dessous :



Ce bloc à ALI est de type non inverseur, avec un gain exprimé en fonction des résistances R_a et R_b placées en contre-réaction. Elle permet la réalisation de cellules présentant un facteur de qualité moyen, jusqu'à environ 20. La fonction de transfert, pour des raisons de simplification d'écriture, est exprimée à l'aide des admittances $Y_i = \frac{1}{Z_i}$ des composants. La tension V_e est sinusoïdale.

Exprimez la fonction de transfert $H_3 = \frac{V_s}{V_e}$ en fonction de Y_1 , Y_2 , Y_3 et Y_4 ainsi que d'un paramètre $A = 1 + \frac{R_b}{R_a}$

14 On pose $Z_1 = R_1$, $Z_2 = 1/jC_2\omega$, $Z_3 = R_3$, $Z_4 = 1/jC_4\omega$. Etablir la fonction de transfert en fonction de R_1 , R_3 , C_2 , C_4 , A et ω .

On note M le noeud entre Z_1 et Z_3 : le diviseur de tension à l'entrée \oplus donne $V_\oplus = \frac{Z_4}{Z_4 + Z_3} V_M$. Le diviseur de

tension pour la borne \ominus donne $V_\ominus = \frac{R_a}{R_a + R_b} V_s$. Il reste ensuite à écrire en M la loi des noeuds $i_1 = i_2 + i_3$ donc $V_M(Y_1 + Y_2 + Y_3) = V_e Y_1 + V_\oplus Y_3 + V_s Y_2$. Ces trois équations permettent d'obtenir

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{A \cdot Y_1 \cdot Y_3}{(Y_1 + Y_2) \cdot (Y_3 + Y_4) + Y_3(Y_4 - AY_2)}$$

15 Simplifier cette expression pour $R_1 = R_3 = R$ et $C_2 = C_4 = C$

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{A \cdot 1/R_1 \cdot 1/R_3}{(1/R_1 + jC_2\omega) \cdot (1/R_3 + jC_4\omega) + 1/R_3(jC_4\omega - A \cdot jC_2\omega)} \text{ donc}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{A}{(1 + jR_3C_2\omega) \cdot (1 + jR_1C_4\omega) + R_1(jC_4\omega - A \cdot jC_2\omega)}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{A}{(1 + jRC\omega) \cdot (1 + jRC\omega) + RjC\omega(1 - A)}$$

$$\frac{V_s}{V_e} = - \frac{A}{1 + (3 - A)jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$$

16 Mettre cette expression sous la forme

$$H_3(j\omega) = H_0 \cdot \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2B}{\omega_0}j\omega + 1}.$$

$$\frac{V_s}{V_e} = -A \times \frac{1}{1 + (3 - A)jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

17 Exprimez B , H_0 et ω_0 en fonction de R , C , R_a et R_b

Par identification, $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $B = \frac{3-A}{2} = 1 - \frac{R_b}{2R_a}$ avec $H_0 = -A = -\left(1 + \frac{R_b}{R_a}\right)$

18 Quelle est la nature du filtre associé ?

Nous avons là un filtre passe-bas du 2e ordre

19 Ecrire l'équation différentielle associée à cette fonction de transfert. Dans quelle mesure cela correspond bien à l'équation d'un circuit RLC série ?

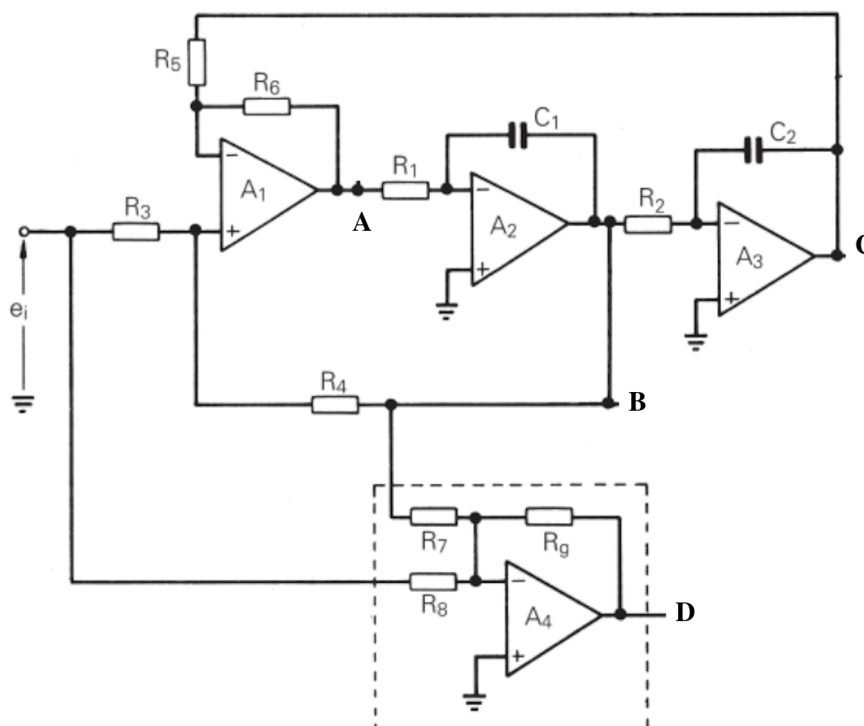
$V_s (1 + (3 - A)jRC\omega + (jRC\omega)^2) = -A.V_e$ donc

$$V_s + (3 - A)RC \frac{dV_s}{dt} + R^2 C^2 \frac{d^2 V_s}{dt^2} = -A.V_e$$

20 Néanmoins, il y a un autre détail à régler avec ce genre de circuit à ALI : discuter de la stabilité de la solution $V_s(t)$ (solution divergente ou non) en fonction des valeurs de A , ce que vous traduirez ensuite en condition sur R_a et R_b

Les solutions V_s sont stables (non divergentes) si $A < 3$

21 On peut vouloir réaliser un filtre quelconque sans recâblage. Le montage ci-dessous permet de réaliser les quatre types de filtres : passe-haut, passe-bas, passe-bande, coupe-bande. Il suffira de mesurer la tension de sortie à des endroits différents du circuit en fonction de ce que l'on veut comme filtre. Etudions son comportement :



Autour des ALI A_2 et A_3 (par exemple en associant A_2 , C_1 et R_1), quels blocs du cours peut-on reconnaître ? Quelle fonction est réalisée par ces blocs pris individuellement ?

A_2 est un intégrateur inverseur, comme A_3

22 Sur le montage à ALI A_4 entouré en pointillés, si l'on rendait ce montage indépendant, et si l'on connectait respectivement à gauche de R_7 et R_8 des tensions u_7 et u_8 , quelle serait la fonction réalisée par ce bloc ?

En utilisant la loi des noeuds au noeud \ominus , et en posant $V_{\oplus} = 0$, on a $u_7 = V_B$ et $u_8 = e_i$ donc $\frac{e_i}{R_8} + \frac{V_B}{R_7} + \frac{V_D}{R_9} = 0$

$$V_D = -R_9 \left(\frac{e_i}{R_8} + \frac{V_B}{R_7} \right)$$

et on a donc une fonction sommateur pondéré.

23 En notant $H_{A_1} = \frac{v_A}{e_i}$, $H_{A_2} = \frac{v_B}{e_i}$, $H_{A_3} = \frac{v_C}{e_i}$ et $H_{A_4} = \frac{v_D}{e_i}$, précisez quels sont les filtres représentés ici.

$$v_A = \frac{v_B}{-\frac{1}{j\omega R_1 C_1}} = \left[e_i \frac{R_4}{R_3 + R_4} + \frac{v_B R_3}{R_3 + R_4} \right] \left[1 + \frac{R_6}{R_5} \right] - \left[-\frac{1}{j\omega R_2 C_2} v_B \frac{R_6}{R_5} \right]$$

$$\frac{v_B}{e_i(j\omega)} = \frac{-\frac{1}{R_1 C_1} \left[\frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right] j\omega}{\frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2} \frac{R_6}{R_5} + \frac{j\omega}{R_1 C_1} \left[\frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_3}{R_4}} \right] - \omega^2}$$

C'est un passe-bande :

$$\frac{v_B}{e_i(j\omega)} = -\frac{A_{o,(B)}}{1 + jQ \left[\frac{\omega}{\omega_o} - \frac{\omega_o}{\omega} \right]}$$

en notant $A_{o,B} = \frac{R_4}{R_3}$ et $\omega_o = \sqrt{\frac{R_6}{R_5 C_1 R_1 C_2 R_2}}$ avec $Q = \sqrt{\frac{C_1 R_1 R_6}{C_2 R_2 R_5}} \times \frac{1 + \frac{R_4}{R_3}}{1 + \frac{R_6}{R_5}}$

On a également un passe-bas du 2e ordre en C :

$$\frac{v_C}{e_i(j\omega)} = \frac{A_{o(C)}}{1 + 2\beta j \frac{\omega_o}{\omega} - \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}$$

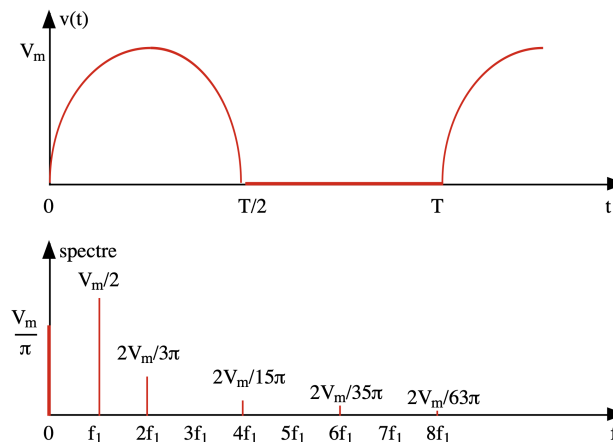
avec $A_{o(C)} = \frac{1 + \frac{R_5}{R_6}}{1 + \frac{R_4}{R_3}}$ et $\omega_o = \sqrt{\frac{R_6}{R_5 C_1 R_1 C_2 R_2}}$ ainsi que $\beta = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{2 + \frac{R_4}{R_3}} \sqrt{\frac{C_2 R_2 R_5}{C_1 R_1 R_6}}$

En B, on a un passe-haut du 2e ordre :

$$\frac{e_B}{e_i(j\omega)} = \frac{A_{o(hp)}}{1 + 2\alpha j \frac{\omega_o}{\omega} - \left(\frac{\omega_o}{\omega} \right)^2}$$

avec $\alpha = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{2 + \frac{R_4}{R_3}} \sqrt{\frac{C_2 R_2 R_5}{C_1 R_1 R_6}}$ et $\omega_o = \sqrt{\frac{R_6}{R_5 C_1 R_1 C_2 R_2}}$ avec $A_{o,(B)} = \frac{1 + \frac{R_6}{R_5}}{1 + \frac{R_4}{R_3}}$

24 Le signal d'entrée e_i est non sinusoïdal et correspond à la tension $v(t)$ représentée ci-dessous, délivrée par un montage qui n'est pas à étudier ici :

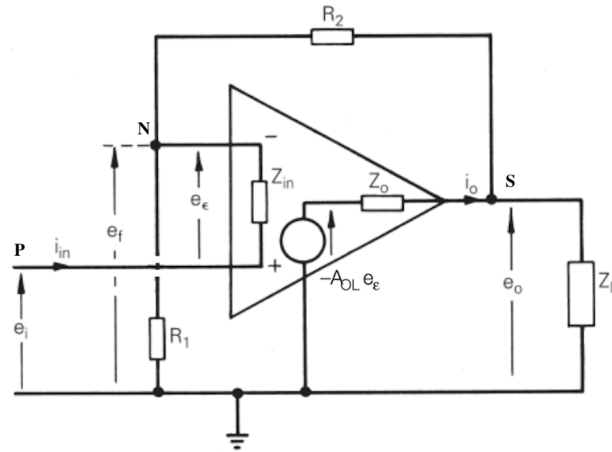


Comment utiliser le bloc à quatre ALI précédent pour récupérer une tension de sortie sinusoïdale ?

Plusieurs méthodes : envoyer ce signal sur le passe-bas, mais il restera la tension continue, ou utiliser le passe-bande centré sur $\omega_o = \omega_1$

25 Comment mesurer la valeur moyenne de ce signal ? Vous expliquerez clairement comment faire concrètement. La valeur moyenne est la composante continue du spectre de Fourier. En utilisant un passe-bas pour $f < f_1$, on récupère cette composante.

26 Plus difficile - Mines - Les ALI ont jusque là été supposés idéaux et le plus souvent en comportement linéaire. Nous allons maintenant modéliser le comportement interne par des équivalents de Thévenin.

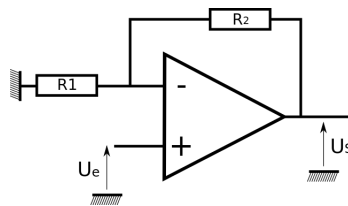


Les notations diffèrent des cas usuels : on note maintenant $e_e = V_- - V_+$ (attention aux signes) et le gain de l'ALI est représenté en sortie sous la forme d'un générateur de fem $e = -A_{OL} \times e_e$. Les impédances Z_{in} et Z_o sont respectivement les impédances équivalentes d'entrée et de sortie.

R_1 est connectée entre N et la masse. R_2 est en rétroaction sur la borne inverseuse.

Pour le cas d'un ALI idéal en fonctionnement linéaire, montrer que ce schéma correspond à un montage amplificateur non inverseur.

Le schéma ci-dessous correspond au même câblage, mais dans le cas d'un ALI idéal avec un gain propre $\mu = A_{OL} \approx \infty$ ici.



avec $U_e = e_i$ sur le schéma du sujet et $U_s = e_o$

27 Dans le cas du schéma détaillé ci-dessus, établir la relation suivante en précisant l'expression de B :

$$e_o = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} e_i - i_o \frac{B}{1 + \beta A_{OL}}$$

En passant par la maille du modèle de Thévenin de sortie de l'ALI, on a : $e_o = -A_{OL} e_e - I_o Z_o$ donc on utilise ensuite $e_e = e_i - e_f$ ce qui donne $e_o = A_{OL} (e_i - e_f) - I_o Z_o$ puis $e_f = \beta e_o$ avec $\beta = R_1 / (R_1 + R_2)$ (on a un diviseur de tension pour S, N et la masse) ce qui aboutit à :

$$e_o = \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} e_i - i_o \frac{Z_o}{1 + \beta A_{OL}}$$

donc $B = Z_o$

28 Montrer que nécessairement i_o va dépendre de Z_L

En appliquant une loi des noeuds en S (on ne le fait quasiment jamais pour les ALI idéaux), on a $i_o + i(R_2) = i(Z_L)$

$$\text{donc } i_o = \frac{e_o}{Z_L} - i(R_2) = \frac{e_o}{Z_L} - \frac{V_N - e_o}{R_2} = \frac{e_o}{Z_L} - \frac{\beta e_o - e_o}{R_2} = f(e_o, Z_L)$$

29 Comment ce résultat se simplifie si $Z_o \rightarrow 0$?

$$e_o \approx \frac{A_{OL}}{1 + \beta A_{OL}} e_i$$

30 Quel est donc l'intérêt d'avoir un ALI avec $Z_o = 0$?

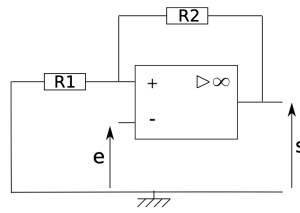
La tension de sortie e_o ne dépend pas de l'impédance connectée en sortie Z_L

31 Comment ce résultat se simplifie si en plus $A_{OL} \approx \infty$?

$$e_o \approx \frac{1}{\beta} e_i$$

et cela rend ce résultat indépendant de la variabilité (précision) du gain propre $A_{OL} = \mu$ de l'ALI

32 On reprend l'étude à nouveau avec des ALI idéaux. Tracer la caractéristique s fonction de e du montage ci-dessous. Vous expliquerez pourquoi ce montage est dit INVERSEUR ou NON INVERSEUR.



On part de l'expression où on a changé le signe de μ_0 dans le cours quand on est passé d'un montage stable amplificateur à ce montage saturé (on a en effet juste inversé les deux bornes \oplus et \ominus) :

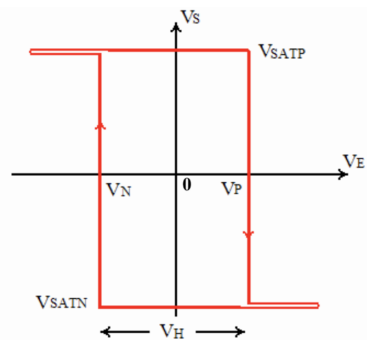
$$\frac{\tau}{1 - \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \frac{ds}{dt} + s(t) = \frac{-\mu_0}{1 - \mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} e(t)$$

On peut simplifier cette relation pour $\mu_0 \gg 1$:

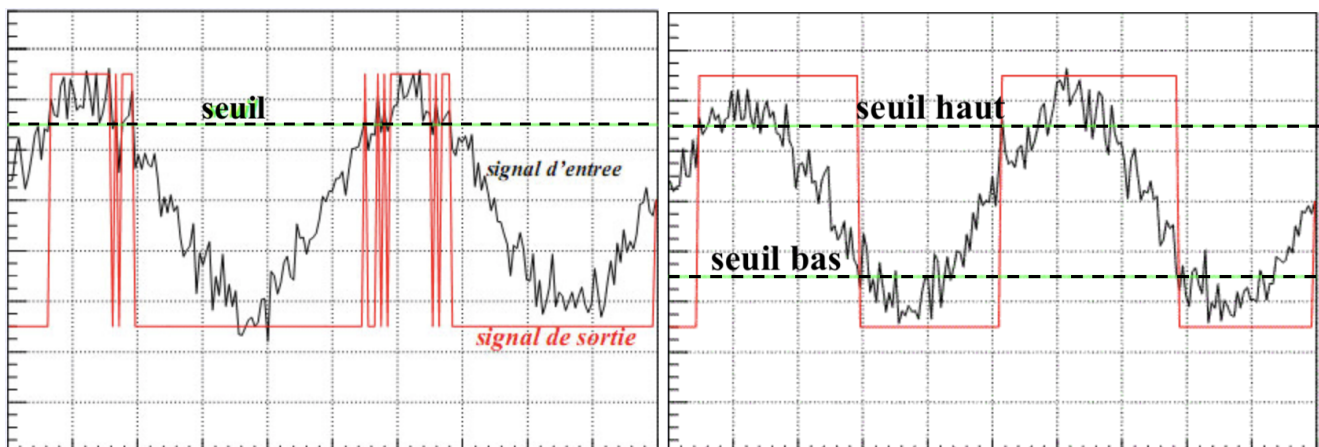
$$\frac{\tau}{-\mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} \frac{ds}{dt} + s(t) = \frac{-\mu_0}{-\mu_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}} e(t)$$

On voit clairement que les deux coefficients sont de signes opposés donc le système n'est pas stable. Ce montage est un **comparateur à hysteresis inverseur**.

Les calculs, classiques, sont ceux du cours pour déterminer les intervalles de fonctionnement avec $v_e = e$ et $v_s = s$ comme noté dans l'énoncé et on exprime les cas $\varepsilon = f(v_e, v_s) > 0$ ou $\varepsilon = g(v_e, v_s) < 0$.



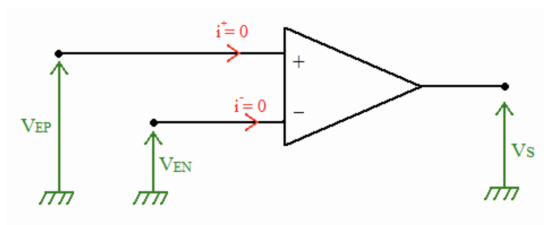
33 On fournit les observations expérimentales pour un montage cité précédemment, mais aussi pour un montage comparateur simple, afin de comparer leurs effets. Les enregistrements des écrans d'oscilloscope en mode balayage temporel sont ci-dessous. Cela correspond au cas d'un signal quasi-sinusoïdal mais bruité comme cela peut se voir sur l'enregistrement à l'oscilloscope.



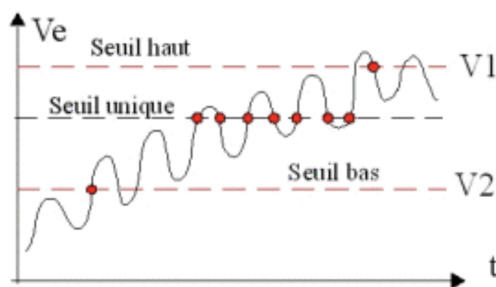
Sur l'enregistrement est précisé le seuil (ou les seuils) impliquant la bascule de la tension de sortie $\pm V_{sat}$

Expliquer quel tracé correspond à quel montage. En déduire l'utilité pratique en électronique du montage non inverseur étudié ici.

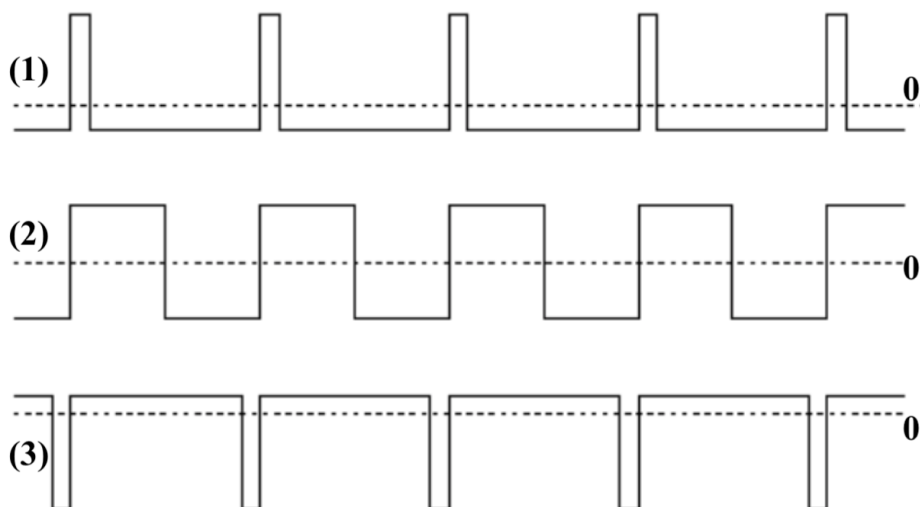
Un comparateur simple fonctionne avec le schéma suivant :



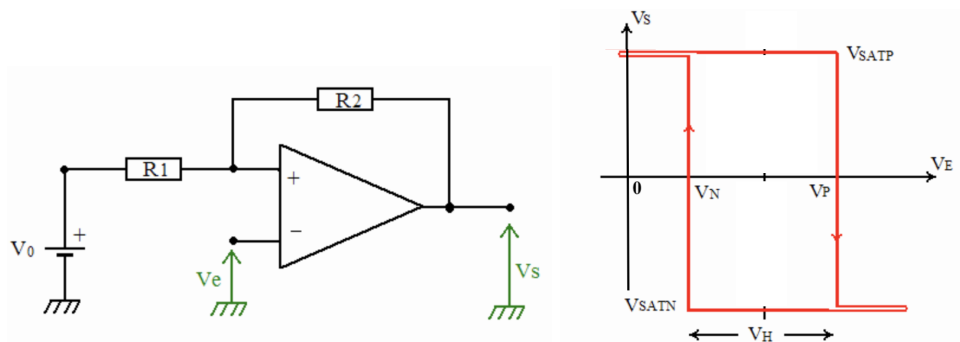
Le comparateur simple comporte un seul seuil, le comparateur à hysteresis comporte deux seuils. Le désavantage du comparateur simple réside dans le fait qu'il est soumis à une tension fluctuant au voisinage du seuil à cause de parasitage à fréquence élevée. A chaque traversée du seuil, il y a une bascule $\pm \beta V_{sat}$ comme représenté sur le tracé. Par contre, un comparateur à hysteresis impose d'atteindre l'autre seuil pour basculer, ce qui n'est pas le cas tant que les amplitudes du parasitage ne sont pas de l'ordre de deux fois le seuil.



34 Expliquer comment modifier le circuit (vous avez à votre disposition un générateur de tension continue V_0) pour obtenir les trois signaux suivant sur l'écran d'un oscilloscope, en utilisant un générateur de laboratoire (en réglant V_0 comme vous l'indiquerez) et un montage inverseur ou non inverseur étudié ci-dessus.



On décale le cycle d'hysteresis inverseur sur l'horizontale grâce à une tension continue V_0 :



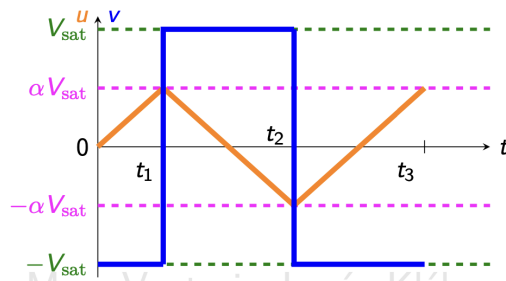
Le changement a lieu au niveau de V_{\oplus} , en prenant par exemple $V_s = +V_{sat}$: $V_{\oplus} = V_0 + \frac{(V_{sat} - V_0) \cdot R_1}{(R_1 + R_2)} = V_P$ qui correspond donc au seuil haut, et avec $V_s = -V_{sat}$, on a le seuil bas $V_{\oplus} = V_0 + \frac{(-V_{sat} - V_0) \cdot R_1}{(R_1 + R_2)} = V_N$

35 Le comportement créneau du tracé (2) peut-il être obtenu également avec un oscillateur à relaxation ? Si oui, proposez un schéma explicatif du montage à réaliser ainsi que là où l'on doit mesurer cette tension. Si non, expliquez pourquoi ce ne peut pas mener à un signal créneau symétrique comme le tracé (2)

Oui, on peut générer un créneau avec un oscillateur à relaxation, c'est à la sortie du comparateur à hysteresis que l'on peut trouver ce signal. (attention : à la sortie du montage intégrateur, on a un triangle).

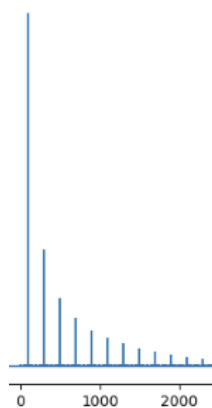
Le schéma comporte un comparateur à hysteresis suivi d'un intégrateur, mais il FAUT que l'un soit inverseur et l'autre non inverseur.

36 Vous expliquerez alors comment on obtient les tensions u et V tracées ci-dessous.



C'est carrément une question de cours comme on a vu dans le poly. On part de $t = 0$ avec des tensions u nulle à la sortie de l'intégrateur et V ici égale par exemple à $-V_{sat}$ en supposant que $\varepsilon < 0$. Et ensuite l'équation différentielle donne $u(t)$ croissante qui permet de faire croître ε jusqu'à 0 où on a bascule etc.

37 Un signal créneau mérite d'être étudié car on va essayer de faire l'acquisition de ce signal et on va rencontrer quelques difficultés.



Le spectre de Fourier représenté ci-dessus correspond à un signal créneau. Celui-ci a-t-il une valeur moyenne nulle ?

Le signal créneau a la forme

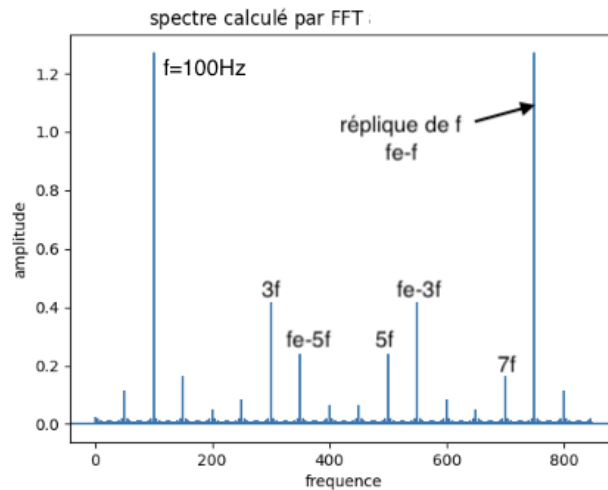
$$V(t) = \frac{4V_{sat}}{\pi} \left(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3} \sin(6\pi ft) + \frac{1}{5} \sin(10\pi ft) + \dots \right)$$

On a dans le spectre toutes les fréquences qui sont des multiples impairs de la fréquence fondamentale f . Il n'y a ici aucun pic de fréquence en $\omega = 0$ donc la valeur moyenne est nulle.

38 pour un signal créneau à $f_c = 100 \text{ Hz}$, on obtient le spectre de Fourier suivant. Peut-on en déduire la fréquence f_e d'échantillonnage ? Quel phénomène a lieu ici et qui va perturber notre acquisition ? Quel moyen simple peut-on utiliser pour s'affranchir de ce problème ?

On reconnaît des pics symétriques par rapport à mf_e qui gardent ici les mêmes amplitudes (ce qui signifie aussi que le sinus cardinal dû à la largeur d'échantillonnage a un zéro à plus hautes fréquences) : on peut donc placer les indications sur le dessin.

De toutes manières, les fréquences autres que 100Hz, puis 300Hz, 500Hz, 700Hz etc. ne correspondent pas au spectre du créneau.



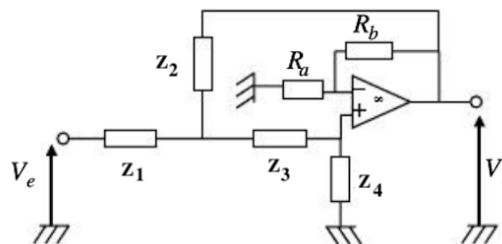
En résolvant $f_e - f = 750\text{Hz} = f_e - 100$, on obtient donc $f_e = 850\text{Hz}$. Remarquons que l'on a une 2e méthode : les deux spectres complets sont symétriques par rapport à $\frac{f_e}{2}$ que l'on peut placer à 425Hz mais je trouve cela un peu moins précis, par contre c'est très visuel.

On parle de phénomène de "repliement de spectre".

On peut l'empêcher en ne gardant, grâce à un filtre passe-bas, que les fréquences initiales inférieures à $\frac{f_e}{2}$ dans le spectre du créneau. Mais pour un créneau avec une infinité de pics impairs, cela fait beaucoup de créneaux filtrés et on n'aura plus un créneau.

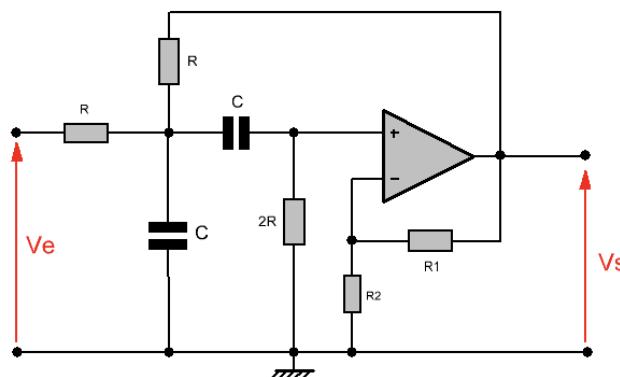
39 On a cité le signal bruité quasi-sinusoïdal qui a servi de test au comparateur précédent. Etudions maintenant ce comportement propre et notamment comment on peut le produire à l'aide d'un oscillateur à ALI.

Comment réaliser un oscillateur sinusoïdal ? On met la sortie d'un amplificateur non inverseur à l'entrée d'un filtre et ensuite la sortie du filtre est envoyée à l'entrée de l'ampli non inverseur déjà cité.



Le montage ci-dessus étudié précédemment peut-il convenir pour réaliser un oscillateur ? Pourquoi ?

40 On modifie le montage qui nous a permis de simuler un circuit RLC série. Il est maintenant câblé comme suit, et réalise un tout autre fonction maintenant. Attention : on utilise des résistances R et $2R$, ainsi que des résistances notées R_1 et R_2 :



Justifiez rapidement de la nature de ce filtre en présentant les résultats des limites en $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$ pour les circuits équivalents en les dessinant.

41 On suppose démontré que la fonction de transfert est alors :

$$H_F(j\omega) = A \frac{2jm \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + 2jm \frac{\omega}{\omega_c} + \left(j \frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}$$

avec les paramètres en fonction des données du schéma :

$$A = \frac{K_A}{3 - K_A} = \frac{R_1 + R_2}{2R_2 + R_1}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

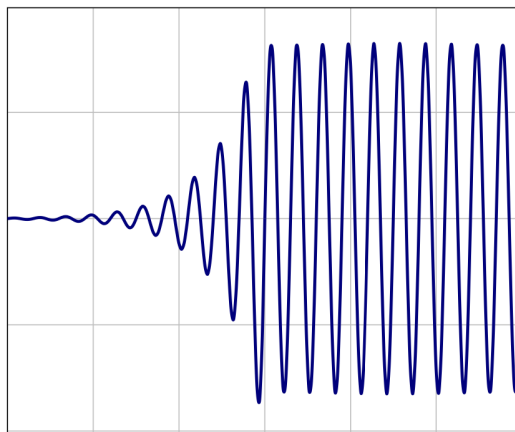
$$2m = \frac{1}{Q} = 3 - K_A = 2 - \frac{R_1}{R_2}$$

Le montage ci-dessus peut-il convenir pour réaliser un oscillateur, en utilisant en plus comme indiqué un montage amplificateur non inverseur (avec des résistances notées R_A et R_B que vous placerez sur votre schéma de circuit oscillateur) ? Pourquoi ?

Quelle l'expression est possible pour la pulsation ω_P d'oscillation ?

A quelle condition est-ce réalisé ? Vous détaillerez la réponse à l'aide des données R_A , R_B , R_1 , etc.

42 Expliquez alors où la tension est mesurée pour obtenir le tracé ci-dessous grâce au montage oscillateur et pourquoi il semble être stabilisé en régime permanent.



— FIN —