Cas particulier des dipôles électrostatiques $\vec{p}$ créant $\vec{E}$ et V

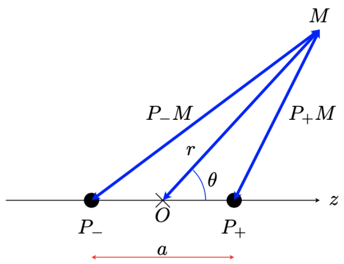
Introduction : nous allons étudier l'association particulière de deux charges dont la somme est $q_1 + q_2 = 0$. Ce cas pourra aussi correspondre à plus de deux charges, dont le barycentre des charges $\oplus$ est P et le barycentre des charges $\ominus$ est N, et tel que $Q_P + Q_N = 0$.

1. Définition générale

Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges opposées ($+q$ placée en P_+et $-q$ placée en P_-) placées à une distance a l'une de l'autre. Pour tout dipôle électrostatique, on définit son moment dipolaire électrique :

$$\vec{p} = q\overrightarrow{P_-P_+} \qquad 1\text{D} = 3,33564 \times 10^{-30}\text{Cm}$$

2. Etude du potentiel V d'un dipôle à grande distance



Les coordonnées des points sont $P_-\left(0,0,-\frac{a}{2}\right)$ $\quad P_+\left(0,0,+\frac{a}{2}\right)$

2. 1 Méthode rapide

Avec $K = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$, on donne directement le potentiel en M, $V_M = Kq\left(\frac{1}{MP_+} - \frac{1}{MP_-}\right) = Kq\frac{MP_- - MP_+}{MP_+ \cdot MP_-}$

Comme $OM = r \gg a$, on a

$$MP_- \simeq r + \frac{a}{2}\cos\theta \qquad MP_+ \simeq r - \frac{a}{2}\cos\theta \qquad MP_- \times MP_+ \simeq r^2$$

ce qui donne

$$V_M = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

2. 2 Méthode par développement limité

On part du même point de départ :

$$V_M = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{MP_+} - \frac{1}{MP_-}\right)$$

$$\begin{cases} P_+M^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - ar\cos\theta = r^2\left(1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 - \frac{a}{r}\cos\theta\right) \\ P_-M^2 = r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + ar\cos\theta = r^2\left(1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 + \frac{a}{r}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_+M^{-1} = r^{-1}\left(1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 - \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \approx r^{-1}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) \\ P_-M^{-1} = r^{-1}\left(1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 + \frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \approx r^{-1}\left(1 - \frac{a}{2r}\cos\theta\right) \end{cases}$$

$$V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\left(1 + \frac{a}{2r}\cos\theta - 1 + \frac{a}{2r}\cos\theta\right) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3. Calcul du champ électrique $\vec{E}$ à grande distance

On part de $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$ avec $\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

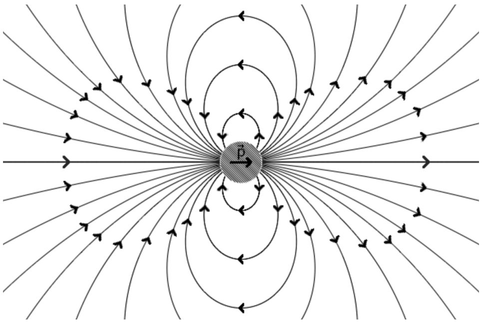
$$\begin{cases} E_r(r,\theta) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} = \frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \end{cases}$$

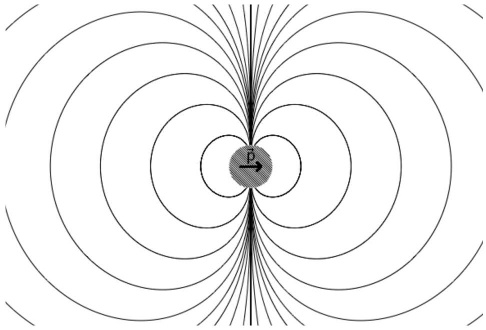
On peut donc l'écrire $\overrightarrow{\mathrm{E}}(r,\theta) = \frac{\mathrm{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} + \sin\theta\,\overrightarrow{\mathrm{e}}_\theta\right]$ ou bien $\vec{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\left(\vec{p}\cdot\vec{e}_r\right)\vec{e}_r - \vec{p}\right]$

4. Lignes de champ et équipotentielles

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta d\phi}{E_\phi} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta} \\ d\phi = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta} \\ d\phi = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = k_1 \sin^2\theta \quad k_1 \in R^+ \\ \phi = cst \end{cases}$$

$$V(M) = \text{ cste. } \Longrightarrow r^2 = k_2\cos\theta$$





5. Interactions avec l'extérieur

On impose un champ électrostatique $\vec{E}_e$ qui pourra être uniforme ou non.

5. 1 **Energie électrostatique**

Soit θ l'angle de NP (support du moment dipolaire $\vec{p}$) avec l'axe $\overrightarrow{Ox}$ pris dans la direction du champ appliqué $\vec{E}_e$. L'énergie potentielle du dipôle dans le champ $\vec{E}_e$ est :

$$E_{\text{p}} = qV_P - qV_N = q\left(V_P - V_N\right)$$

$\vec{E}_e = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}\vec{e}_x = -\frac{V_P - V_N}{a\cos\theta}\vec{e}_x$ donne $E_{\text{p}} = -aqE_e\cos\theta$ donc

$$E_{\text{p}} = -pE_e\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}_e$$

L'énergie potentielle est minimum lorsque $\theta = 0$, indiquant que le dipôle est en équilibre stable quand il est orienté parallèlement au champ appliqué.

5. 2 **Force exercée par un champ extérieur $\vec{E}_e$**

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_{\text{p}}$ par définition donc $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p}\cdot\vec{E}_e)$ et $\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{B} + \vec{A}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} + (\vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{A} + \vec{B}\wedge\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ et puisque le rotationnel de E_e est nul, et que p est constant, on obtient directement

$$\overrightarrow{\mathrm{F}} = (\vec{p}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\overrightarrow{\mathrm{E_e}}$$

Un dipôle subit donc une force dirigée vers les champs forts s'il est aligné avec E_e

5. 3 **Couple exercé par un champ extérieur $\vec{E}_e$** UNIFORME

Les charges $(-q)$ et $(+q)$ sont soumises aux forces électriques :

$$\vec{F}_N = -q\vec{E}_e \text{ et } \vec{F}_P = +q\vec{E}_e \text{ égales et opposées}$$

Le dipôle est donc soumis à un couple de forces de moment :

$$\vec{\Gamma} = \overrightarrow{ON}\wedge\vec{F}_N + \overrightarrow{OP}\wedge\vec{F}_P = \left(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}\right)\wedge q\vec{E}_e = \vec{p}\wedge\vec{E}_e$$

Le moment du couple est donc $\Gamma = \mathrm{p}E_e\sin\theta$ avec $p = 2aq$. Les positions d'équilibre ($\Gamma = 0$) sont telles que $\sin\theta = 0$, soit $\theta = 0$ (stable) et $\theta = \pi$ (instable).

6. Développement multipolaire

$$V(M) = \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\sum q_i}_{\text{monopole}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\sum q_i r_i\cos\theta_i}_{\text{dipôle}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sum\frac{q_i r_i}{2}\left(3\cos^2\theta_i - 1\right)}_{\text{quadrupôle}} + O\left(\frac{1}{r^4}\right)$$