TD de révision de Physique-Chimie avant la rentrée en PSI

Exercice 1. Chimie des solutions

Mise en solution aqueuse d'un acide fort.
On a $V_1 = 10\,mL$ d'acide chlorhydrique $HC\ell$ aqueux de concentration $C_0 = 1\,mol/L$ que l'on verse dans un bêcher contenant $V_2 = 90\,mL$ d'eau pure.

1. 1 Rappeler les caractéristiques d'un acide fort.
Indications :
un acide fort réagit selon $AH + H_2O \rightarrow A^{\ominus} + H_3O^{\oplus}$ avec une constante de réaction quasi-infinie.
On parle de dissociation "totale"
SOUCI : il faut donc recommencer l'étude avec les nouvelles espèces créées par la réaction totale comme condition initiale
Par exemple $A^{\ominus}$ pourrait réagir avec une autre espèce présente, avec une constante plus "faible"

1. 2 Déterminer le pH de la solution obtenue

calcul de pH
- Ecrire la réaction chimique complète ou <u>toutes</u> les réactions possibles
- Faire le choix de la réaction prépondérante (R.P.) en précisant les valeurs des constantes de réaction
- Faire le tableau d'avancement de la R.P.
- Faire des hypothèses sur l'avancement et en déduire le pH.
- Vérifier si l'hypothèse est compatible.

Indication :
La réaction possible qui suit la réaction totale de dissociation de l'acide fort est :

$$A^{\ominus} + H_2O \rightleftharpoons AH + HO^{\ominus}$$

Un tableau d'avancement est possible ? La constante de cette réaction est $K = \dfrac{K_e}{K_a}$ avec $K_a \rightarrow \infty$ pour la réaction totale de réaction de l'acide fort avec l'eau. Donc $K \rightarrow 0$ ce qui signifie que cette deuxième réaction n'a pas lieu.
Quelle autre réaction possible alors ?
Il reste juste H_2O dans la liste des réactifs, ce qui guide vers $2H_2O \rightleftharpoons H_3O^{\oplus} + HO^{\ominus}$ qui est souvent négligée ("auto-protolyse de l'eau")
On néglige l'auto-protolyse donc les espèces présentes ne changent pas de concentration : on avait $[H_3O^{\oplus}] = 10^{-1} mol/L$ du fait de la dilution de V_1 dans V_2. On en déduit donc que $pH \approx 1$.

1. 3 Vérifier que l'hypothèse consistant à négliger l'autoprotolyse de l'eau est une bonne approximation.
La zone de pH correspondant à l'autoprotolyse de l'eau. Comme cette réaction modifie de manière identique $H_3O^{\oplus}$ et $OH^{\ominus}$, on suppose que $[H_3O^{\oplus}]$ et $[HO^{\ominus}]$ sont du même ordre de grandeur ce qui correspond à l'intervalle de pH entre 6 et 8.
Ici nous avons trouvé un pH dans le domaine de prédominance de $H_3O^{\oplus}$, sans que cela soit en contradiction avec les hypothèses de calcul (milieu acide donc $pH < 6$ et autoprotolyse négligée donc $6 < pH < 8$), donc l'autoprotolyse de l'eau continue à être négligeable.

1. 4 *Mise en solution aqueuse d'un acide faible.*
Comment le raisonnement et le calcul précédent est modifié si cette fois on utilise un acide faible HA à la place de $HC\ell$? On notera $K_a = 10^{-5}$ la constante d'équilibre associée à la réaction de HA avec H_2O. <u>En résumé</u>, on pourra se poser les questions suivantes :

(a) Rappeler les caractéristiques d'un acide faible :
la réaction n'est pas totale
On a $AH + H_2O \rightleftharpoons A^{\ominus} + H_3O^{\oplus}$ avec une constante $K = K_a = 10^{-5}$

(b) Déterminer le pH de la solution obtenue sans approximation
à faire avec un tableau d'avancement ;

on suppose un avancement x en mole.

AH	$+$	H_2O	$\rightleftharpoons$	$A^{\ominus}$	$+$	$H_3O^{\oplus}$
c_0		*excès*		≈ 0		≈ 0
$c_0 - x$		*excès*		x		x

on utilise alors l'expression générale de la constante d'équilibre : $Ka = \dfrac{(A^{\ominus})(H_3O^{\oplus})}{(AH) \times 1}$

(c) Simplifier le calcul précédent en supposant l'acide peu dissocié :
si l'acide est peu dissocié, alors on peut supposer que $\boxed{x \ll c_0}$*. Cette hypothèse peut se traduire autrement : l'acide étant peu transformé en sa base conjuguée, il est majoritaire donc nous sommes dans la zone de prédominance de AH donc $pH < pK_a$. Cela sera utilisé dans les questions suivantes pour vérifier l'hypothèse que nous sommes en train de formuler.*
On utilise ensuite la définition de la constante d'équilibre de la réaction supposée prépondérante :
$K = \dfrac{(A^{\ominus})(H_3O^{\oplus})}{(AH) \times 1} = K_a$ *et avec l'hypothèse* $Ka \approx \dfrac{x^2}{c_0 \times 1}$*, cela permet d'aboutir à* $x = [H_3O^{\oplus}] \approx \sqrt{K_a c_0}$
donc $pH \approx \dfrac{1}{2}(pK_a + pc_0)$ *en notant* $pc = -\log c$

(d) Recalculer alors le pH. Commenter :
comme $pH \approx \dfrac{1}{2}(pK_a - \log c_0) = \dfrac{1}{2}(5 - \log c_0)$*. On avait* $c_0 = 10^{-1} mol/L$ *du fait de la dilution donc* $pH \approx 3$.

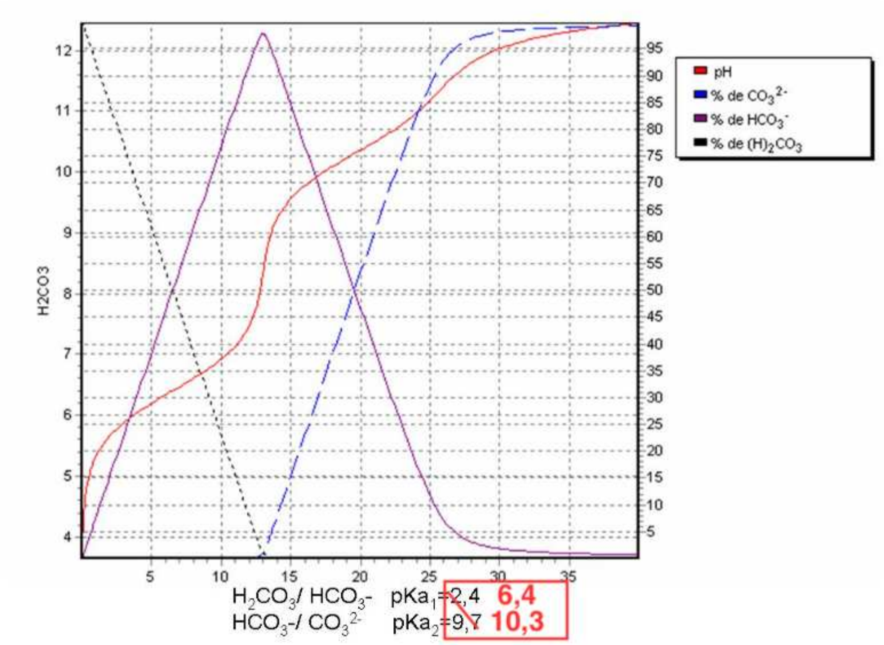
(e) Vérifier que l'hypothèse consistant à supposer l'acide peu dissocié est une bonne approximation :
l'approximation imposait $pH < 5$, ce qui est le cas donc l'hypothèse est validée.

(f) Vérifier que l'hypothèse consistant à négliger l'autoprotolyse de l'eau est une bonne approximation :
cette nouvelle hypothèse impose de ne pas être dans l'intervalle où $H_3O^{\oplus}$ ou $HO^{\ominus}$ sont prédominants. Cela signifie donc que ne pas négliger l'autoprotolyse revient à vérifier $6 < pH < 8$. Ce n'est pas le cas ici car $pH = 3$

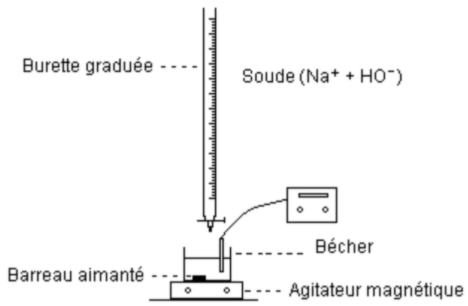
Exercice 2. Chimie des solutions

Etude d'un dosage d'un di-acide faible H_2A par une base forte $HO^{\ominus}$
Le diacide (noté simplement H_2A) est ici H_2CO_3.

En solution aqueuse, l'acide carbonique H_2CO_3 est un diacide, c'est-à-dire qu'il peut se dissocier deux fois de suite dans l'eau en libérant chaque fois un proton sous forme de cation $H_3O^{\oplus}$:
$H_2O + H_2CO_3 \rightleftharpoons H_3O^{\oplus} + HCO_3^{\ominus}$: $pKa_1 = 6,37 \approx 6,4$.
$H_2O + HCO_3^{\ominus} \rightleftharpoons H_3O^{\oplus} + CO_3^{2\ominus}$: $pKa_2 = 10,32 \approx 10,3$.
Quand l'acide carbonique est combiné avec un cation, des sels nommés bicarbonates (Nom UICPA : hydrogéno-carbonate $HCO_3^{\ominus}$) et carbonates ($CO_3^{2\ominus}$) peuvent se former. Par exemple, combiné avec de la chaux (oxyde de calcium CaO dite "chaux vive") il constitue du carbonate de calcium $CaCO_3$ (constituant principal du calcaire, de la craie).
Document à analyser : le titrage d'un volume $V_A = 10mL$ de H_2CO_3 de concentration C_A inconnue mais voisine de $0,1mol.L^{-1}$ par de la soude de concentration $C_B = 0,1mol.L^{-1}$.



2. 1 Faire un schéma expérimental du montage de dosage avec suivi pH-métrique :

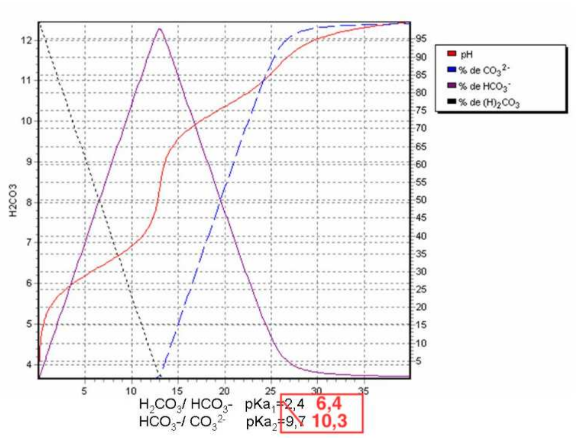


Dans le bécher, on a placé l'acide. L'agitateur magnétique permet d'homogénéiser la solution. Le pH-mètre comporte une seule (double) électrode. La burette graduée est remplie de solution de soude.

2. 2 Rappeler quelles sont les caractéristiques d'une réaction de dosage :
Le choix d'une réaction de dosage doit satisfaire à trois exigences.
Elle doit être :
- unique (non parasitée par une autre réaction ayant les mêmes réactifs mais des produits différents),
- totale (disparition d'au moins l'un des réactifs mis en présence ; critère thermodynamique),
- rapide (parvenir à son terme instantanément ou dans un délai très bref ; critère cinétique).
En effet, afin de faire des tableaux d'avancement sans équivoque, il faut absolument avoir des réactions mises en jeu qui soient **totales**.

2. 3 Ecrire les réactions possibles entre la soude (solution aqueuse de $Na^{\oplus}$ et $HO^{\ominus}$) et H_2CO_3 (noté H_2A). Laquelle possède la plus grande constante d'équilibre ?
Ici la première réaction mise en jeu, par exemple, est $H_2A + HO^{\ominus} \rightarrow HA^{\ominus} + H_2O$ car la constante associée est $K = \dfrac{(A^{\ominus})}{(AH)(HO^{\ominus})} = \dfrac{Ka_1}{K_e} = \dfrac{10^{-6,4}}{10^{-14}} = \boxed{10^{+7,6}} \gg 1$
N'oublions pas que la solution d'acide comporte le solvant eau H_2O, donc une autre réaction pourrait être $H_2A + H_2O \rightleftharpoons HA^{\ominus} + H_3O^{\oplus}$ *de constante égale à* $K' = \dfrac{(HA^{\ominus})(H_3O^{\oplus})}{(H_2A)} = Ka_1 = \boxed{10^{-6,4}}$.
Si un peu de $HA^{\ominus}$ est créé par la présence de H_2A avec H_2O, la réaction $HA^{\ominus} + HO^{\ominus} \rightleftharpoons A^{2\ominus} + H_2O$ donc la constante est $K'' = \dfrac{Ka_2}{Ke} = 10^{+3,7}$, *MAIS de toutes manières $HA^{\ominus}$ ne fait pas partie des espèces "initialement présentes".*
Au bilan, on a deux réactions possibles :
(1) : $H_2A + HO^{\ominus} \rightarrow HA^{\ominus} + H_2O$
(2) : $H_2A + H_2O \rightleftharpoons HA^{\ominus} + H_3O^{\oplus}$
Les valeurs des constantes indiquent que c'est la réaction (1) qui est prépondérente (le facteur multiplicatif est largement plus grand que le 100 *traditionnel).*

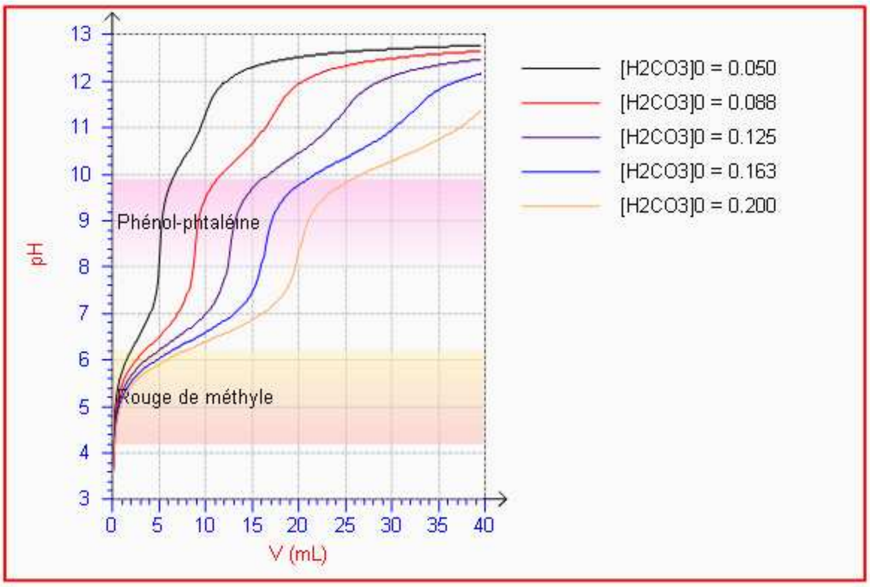
2. 4 Identifier sur le graphique les réactions successives :



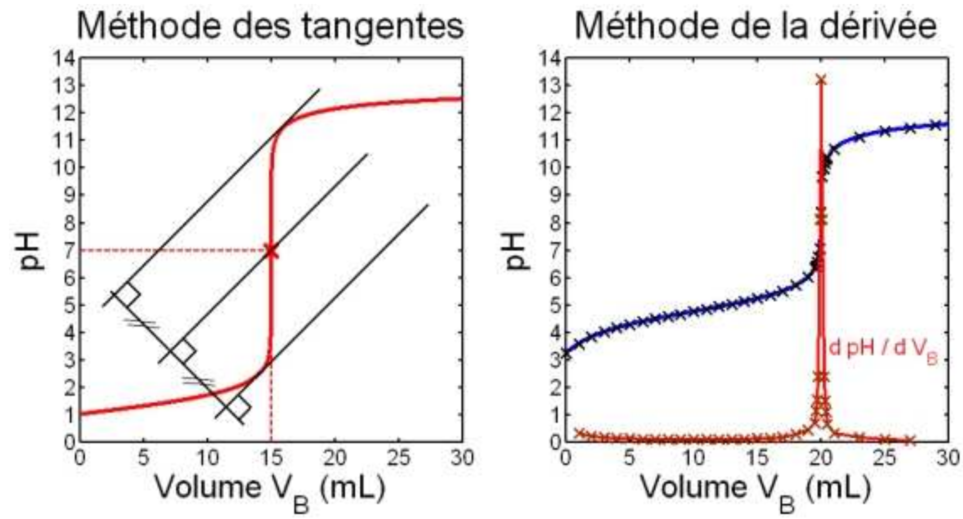
La première réaction qui a lieu est donc (1). Le di-acide est transformé en sa base conjuguée. Sur les courbes donnant la répartition en espèces, on voit que cette réaction (1) est terminée vers $V_1 \approx 13\,cm^3$ car la quantité de H_2A est alors nulle. Ce volume correspond alors à une solution de presque 100% de $HA^{\ominus}$ sur le graphique. C'est seulement à partir de ce volume que commence la décroissance de $HA^{\ominus}$ et la croissance de $A^{2\ominus}$: c'est la 2ème réaction qui commence et il s'agit donc de $HA^{\ominus} + HO^{\ominus} \rightleftharpoons A^{2\ominus} + H_2O$.

2. 5 Justifier à partir du graphique que l'on peut considérer les deux réactions comme successives.
Comme on l'a observé à la question précédente, la quantité de H_2A est alors nulle pour V_1, ce qui veut dire que la réaction (1) est terminée quand la réaction suivante commence.

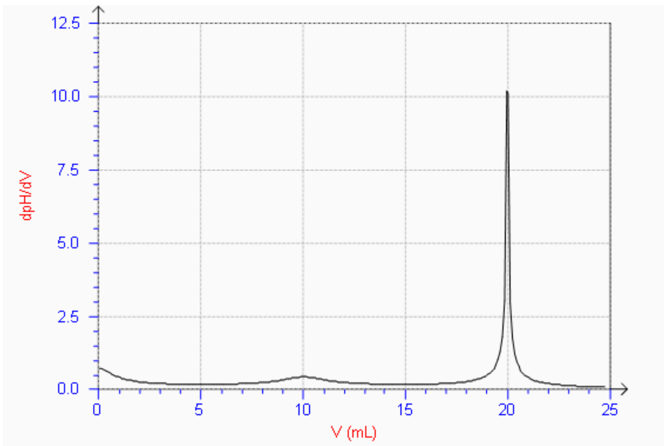
2. 6 Déterminer le volume de soude versée à l'équivalence (préciser laquelle vous choisissez) et calculer C_A :
On voit sur le graphique suivant que la courbe de dosage est décalée en fonction de la concentration initiale de di-acide.



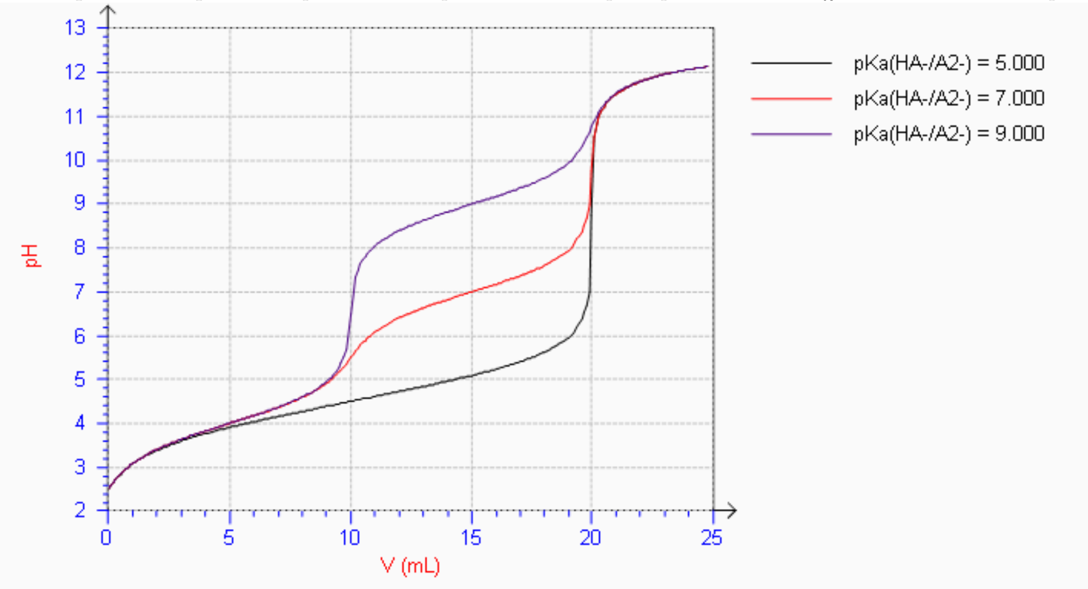
Pour déterminer les volumes équivalents, on a deux méthodes classiques :

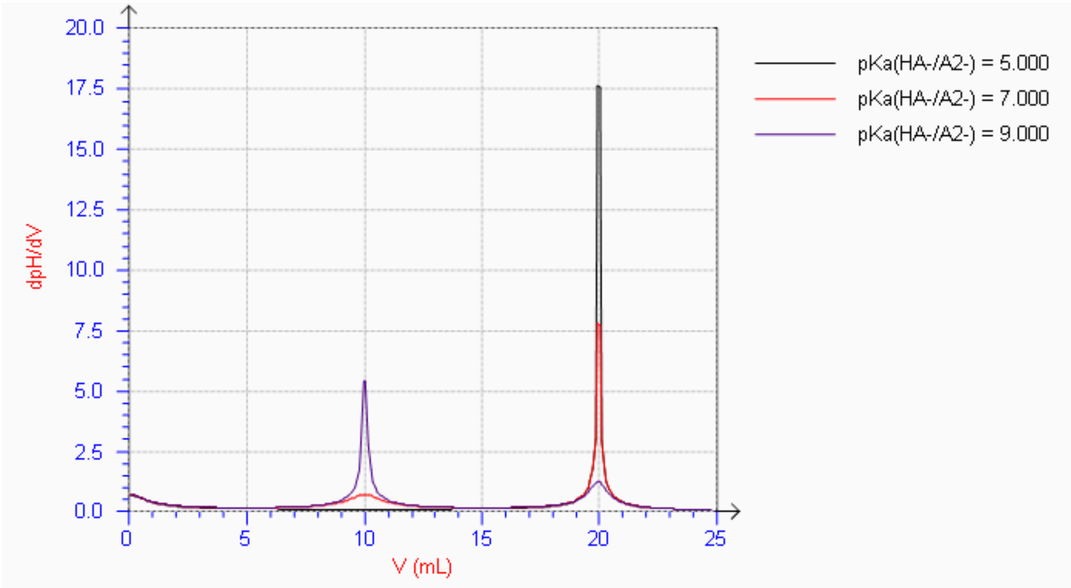


Remarquons que la méthode de la dérivée est visuellement précis.
Pour un di-acide, on note deux sauts de pH, donc deux pics de dérivée :



Par contre, remarquons que les sauts de pH (ainsi que le calcul des dérivées) ne donnent efficacement les volumes équivalents que si les pHa sont espacés. On compare $pKa_1 = 4$ à différentes valeurs de pKa_2 :





On remarque que l'on ne peut voir parfois qu'un seul saut de pH (cas où $pKa_2 = 5$).

2. 7 Déterminer le pH de la solution initiale. Commenter en particulier les hypothèses faites lors de ce calcul :
remarquons que le cas de la solution initiale, c'est-à-dire avec un volume nul versé de soude, correspond à une solution de H_2A dans l'eau, cas classique du cours.

Résumé de cours d'électrocinétique :

1 Courant électrique

2 Loi d'Ohm

3 Composition des circuits

3.1 Les dipôles

3.2 Caractéristique d'un dipôle

3.3 Fils de connexion - Noeuds - Branche - Maille - Réseau

4 Lois de Kirchhoff

4.1 Loi des noeuds et conservation de la charge

5 Puissance électrocinétique reçue par un dipôle

6 Modélisations linéaires d'un dipôle actif

6.1 Représentation de Thévenin

6.2 Représentation de Norton

7 Théorèmes généraux relatifs aux réseaux linéaires

7.1 Association série de dipôles - Diviseur de tension

7.2 Association parallèle de dipôles - Diviseur de courant

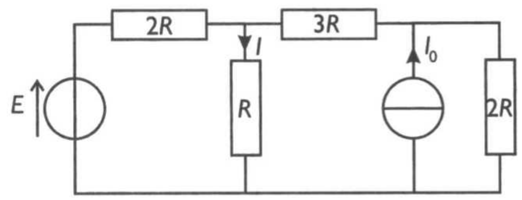
Association parallèle de générateurs de NORTON :

$$I_0 = I_{0_1} + I_{0_2} \quad \text{et} \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Diviseur de courant :

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

Exercice 3. Electrocinétique

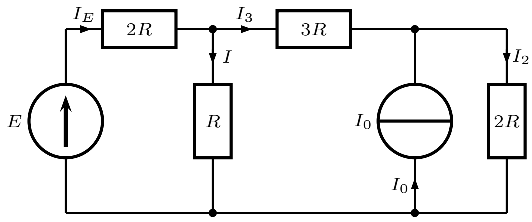


Calculez l'expression du courant I en fonction des données du schéma (E, I_0, R) en utilisant les méthodes suivantes :

3. 1 les lois de Kirchhoff

C'est la méthode la plus simple du point de vue de la théorie, mais elle comporte autant d'équations qu'il y a d'inconnues (qui sont les différents courants dans les branches, sauf s'il y a un courant imposé par un générateur de courant). Voilà donc l'inconvénient majeur : avoir à résoudre un système de N équations à N inconnues.

Commençons par placer les inconnues sur le schéma :



Les inconnues ajoutées sont I_3, I_1, I_E et I_2 en plus du I à déterminer. Je rappelle que I_0 est connue.
Comme nous avons quatre inconnues, il nous faut quatre équations.
On écrit par exemple deux lois des mailles : $E - 2R.I_E = R.I$ ainsi que $R.I = 3R.I_3 + 2R.I_2$
Ensuite, on écrit les deux lois des noeuds supplémentaires : $I_E = I_3 + I$ et $I_3 + I_0 = I_2$.
La résolution procède par élimination successive des inconnues (c'est plus simple avec les méthodes matricielles) :

$$\begin{cases} (1) \quad E - 2RI_E = RI \\ (2) \quad RI = 3RI_3 + 2RI_2 \\ (3) \quad I_E = I_3 + I \\ (4) \quad I_3 + I_0 = I_2 \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} (1) \quad E - 2RI_E = RI \\ (2) \quad RI = 3R(I_2 - I_0) + 2RI_2 \\ (3) \quad I_E = (I_2 - I_0) + I \end{cases}$$

qui ensuite se ramène à un système à deux inconnues :

$$\begin{cases} (1) \quad E - 2R(I_2 - I_0 + I) = RI \\ (2) \quad RI = 3R(I_2 - I_0) + 2RI_2 \end{cases}$$

Le meilleur moyen de simplifier est de faire $5 \times (1) - 2 \times (2)$ pour éliminer I_2 avec :

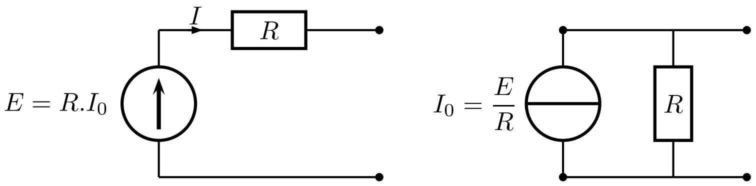
$$\begin{cases} (1) \quad 3RI + 2RI_2 = E + 2RI_0 \\ (2) \quad 5RI_2 - RI = 3RI_0 \end{cases}$$

L'utilisation de ces équations donne donc $\boxed{I = \dfrac{4\,I_0\,R + 5\,E}{17\,R}}$ et aussi $I_2 = \dfrac{11 I_0 R + E}{17R}$

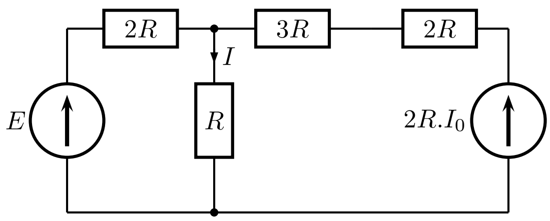
3. 2 l'utilisation des équivalents de Thévenin et Norton

C'est une méthode élégante et utilisant les schémas électriques.

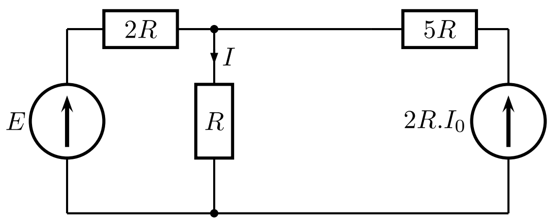
On utilise une équivalence "graphique" entre les deux schémas ci-dessous (Thévenin et Norton pour les curieux) à condition de strictement respecter les deux bornes représentées par des points.



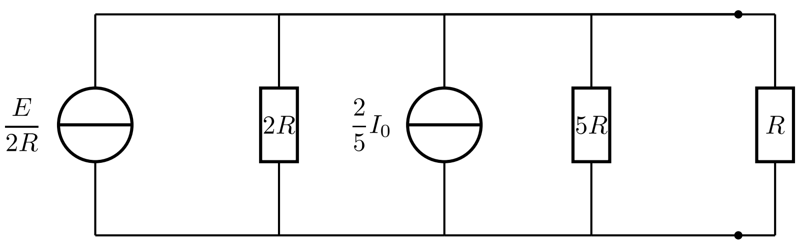
On peut donc transformer le schéma électrique progressivement :



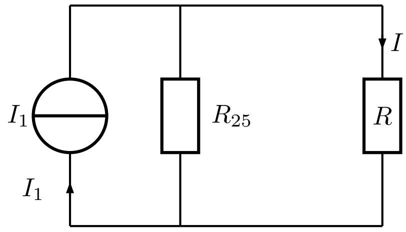
Ce schéma devient :



Puis ensuite on passe aux générateurs de Norton, car deux générateurs de courant en parallèle sont équivalents à un générateur de courant qui débite la somme des courants de deux générateurs : on a d'abord effectué la transformation en générateurs de courant.

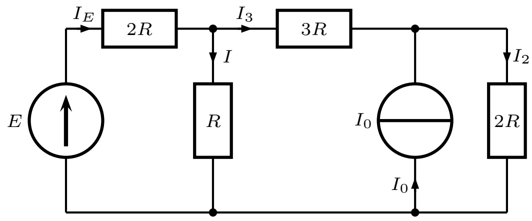


Ensuite on regroupe les générateurs :



Le générateur équivalent débite donc $I_1 = \dfrac{E}{2R} + \dfrac{2}{5}I_0$. La résistance équivalente aux deux résistances $2R$ et $5R$ en parallèle est donc $R_{25} = \dfrac{2R \times 5R}{2R + 5R} = \dfrac{10}{7}R$.
Ensuite, il suffit d'utiliser le "diviseur de courant" vu en cours : l'intensité I est une fraction connue de l'intensité I_1 car on a $I = I_1\dfrac{R_{25}}{R_{25} + R} = \left(\dfrac{E}{2R} + \dfrac{2}{5}I_0\right)\dfrac{10}{10+7} = \dfrac{5}{17}\dfrac{E}{R} + \dfrac{4}{17}I_0$

3. 3 la loi des noeuds
C'est $\boxed{\textbf{LA méthode}}$ "magique" qui permet d'aboutir au résultat rapidement.
Nous aurons bien des occasions pour utiliser cette méthode rapide, lorsque nous devrons étudier des montages électriques.

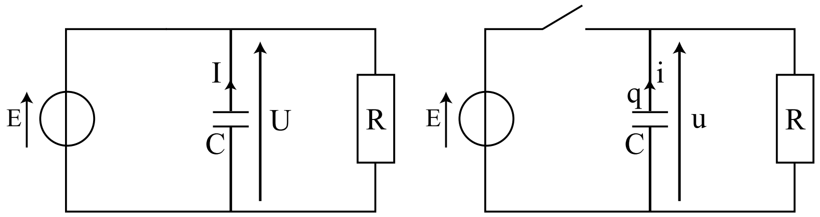


On commence par écrire la loi des noeuds $I_E = I + I_3$ pour le premier noeud du circuit.
Pour l'autre noeud, on a $I_3 + I_0 = I_2$.
On note N_1 et N_2 les deux noeuds sur le schéma, avec des potentiels respectivement notés V_1 et V_2.
La méthode est la suivante : en déduire les potentiels V_1 et V_2 inconnus avec un système à deux équations. Les intensités recherchées sont ensuite facilement exprimées en fonction de ces deux potentiels : ici, tout simplement $I = \dfrac{V_1}{R}$. Remarquons que si l'on avait voulu I_3 par exemple, on aurait utilisé $I_3 = \dfrac{V_1 - V_2}{3R}$. On a donc $I_E = I + I_3$ qui devient $I = \dfrac{V_1}{R} = \dfrac{-V_1 + E}{2R} + \dfrac{V_1 - V_2}{3R}$ donc $\boxed{V_1\left(\dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{3R}\right) = \dfrac{E}{2R} + \dfrac{V_2}{3R}}$ De même avec la 2ème loi des noeuds, $I_3 + I_0 = I_2$ devient $\dfrac{V_1 - V_2}{3R} + I_0 = \dfrac{V_2}{2R}$ donc $\boxed{V_2\left(\dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{3R}\right) = I_0 + \dfrac{V_1}{3R}}$.
Ainsi, on aboutit facilement à la réponse : $V_1 = (4I_0R + 5E)/17$ et $V_2 = (22I_0R + 2E)/17$ donc

$$\boxed{I = \frac{V_1}{R} = \frac{5}{17}\frac{E}{R} + \frac{4}{17}I_0}$$

8 Régime libre du circuit RC

8.1 Évolution de la tension aux bornes du condensateur



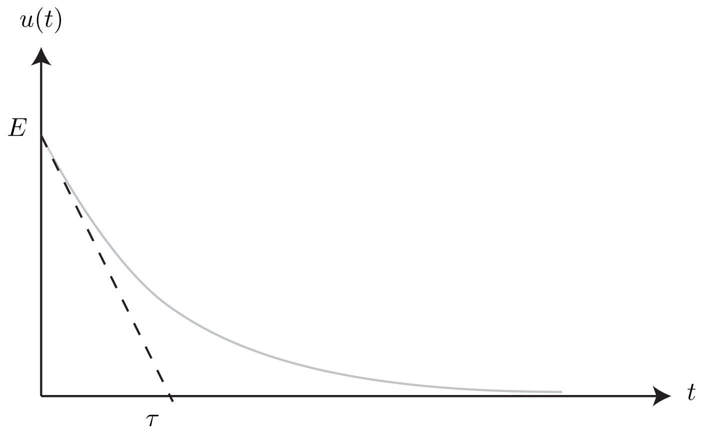
Le condensateur est initialement chargé sous une tension E. En régime continu, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert $U = E$ et $I = 0$ (E/R dans la résistance).
A $t = 0$, on ouvre l'interrupteur, le condensateur se décharge dans la résistance :

$$u = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

La solution est de la forme $u(t) = A\exp(-t/\tau)$.
$u(0) = A = E$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.
Finalement :

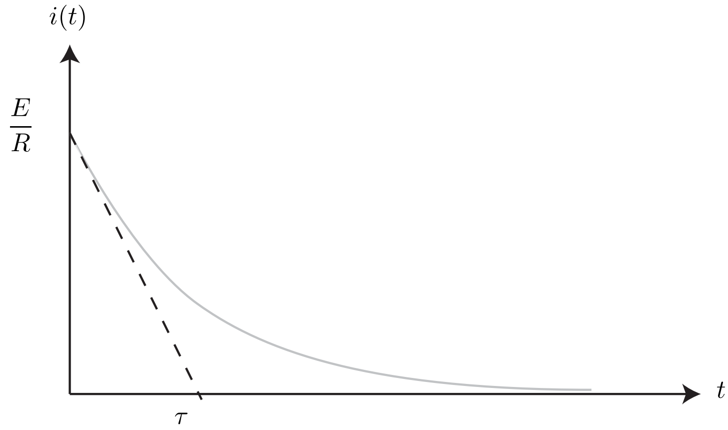
$$\boxed{u(t) = E\exp(-t/\tau)}$$



8.2 Évolution de l'intensité du courant

$i = -\frac{dq}{dt} = -C\frac{du}{dt}$, ce qui donne :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp(-t/\tau)}$$



8.3 Étude énergétique

9 Régime libre du circuit RL

9.1 Évolution de l'intensité du courant

9.2 Évolution de la tension aux bornes de la bobine

9.3 Étude énergétique

10 Régime libre du circuit RLC série

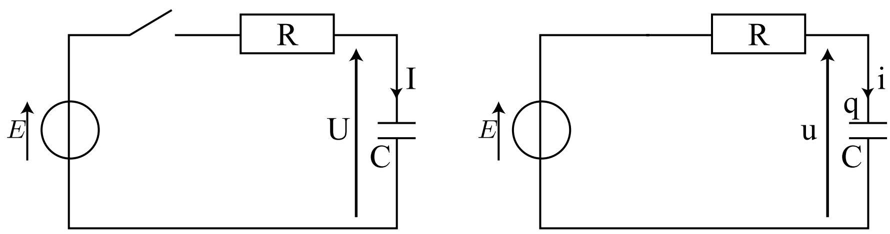
10.1 Équation différentielle

10.2 Différents régimes

10.3 Étude énergétique

11 Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension

11.1 Évolution de la tension aux bornes du condensateur



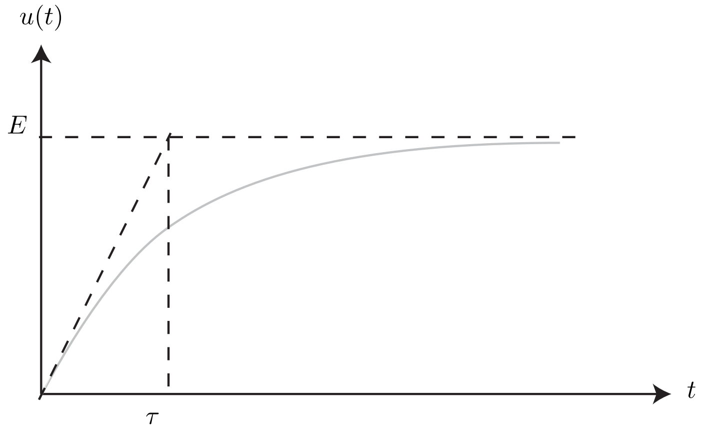
Le condensateur est initialement déchargé (Régime continu $U = 0$ et $I = 0$).
A $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le condensateur se charge :

$$E = Ri + u = RC\frac{du}{dt} + u$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

La solution est de la forme $u(t) = u^{(h)} + u^{(p)} = A\exp(-t/\tau)$+E.
$u(0) = A + E = 0$ par continuité de la tension aux bornes du condensateur.
Finalement :

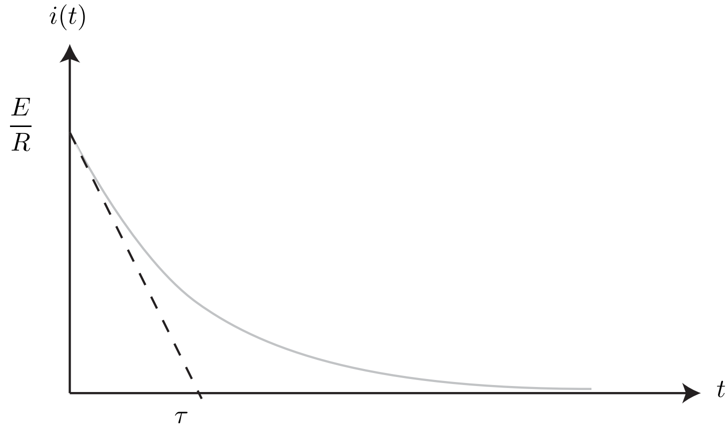
$$\boxed{u(t) = E(1 - \exp(-t/\tau))}$$



11.2 Évolution de l'intensité du courant

$i = +\dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$ ce qui donne :

$$\boxed{\frac{E}{R}\exp(-t/\tau)}$$



11.3 Bilan énergétique

12 Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension

12.1 Évolution de l'intensité du courant

12.2 Évolution de la tension aux bornes de la bobine

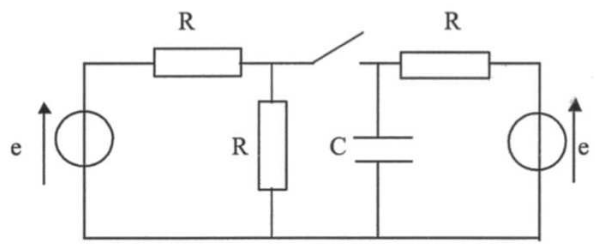
12.3 Bilan énergétique

13 Réponse d'un circuit RLC série à un échelon de tension

13.1 Tension aux bornes du condensateur

13.2 Bilan énergétique

Exercice 4. Régime transitoire d'un circuit RC



A l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur. Le condensateur est initialement chargé avec $q(0) = Q_0$.

Résolution

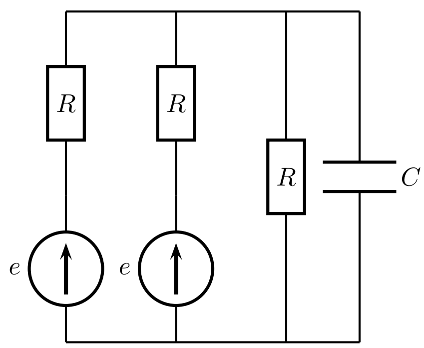
Le système d'équations de Kirchhoff utilise 4 intensités inconnues. Il faut donc 4 équations (par exemple ici, 3 équations de maille et 1 loi des noeuds). Le système est donc un peu complexe. Il vaut mieux utiliser les équivalents de Thévenin et Norton.
Il s'agit d'être rusé et rapide.

4. 1 Montrer que $Q_0 = Ce$

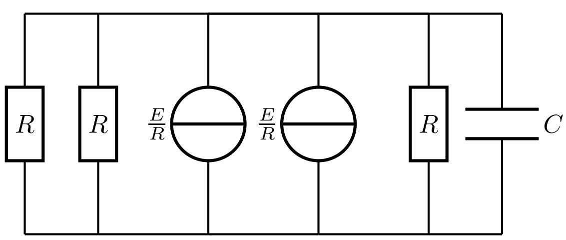
le condensateur est initialement chargé. Sa charge Q_0 est valide pour l'intervalle $t < 0$. Durant cette période, l'interrupteur est ouvert et l'on doit observer le circuit RC connecté en série au générateur de fem e. Comme ce générateur est connecté depuis "longtemps", le condensateur est chargé, comme on l'a vu au chapitre "Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension" : la charge limite correspond au courant limite nul dans ce circuit, i-e $Q_0 = Ce$

4. 2 pour $t > 0$, montrer que les deux générateurs de Thévenin (e, R) sont en parallèle et peuvent être remplacés par deux générateur de Norton en parallèle dont le générateur de Thévenin équivalent est $(\dfrac{2e}{R}, \dfrac{R}{2})$:

lorsque l'interrupteur est fermé, on a le schéma suivant



Les deux générateurs de Thévenin peuvent donc être transformés en générateurs de Norton :



Les deux résistances R en parallèle peuvent être remplacées par une résistance $\frac{R}{2}$ et le générateur équivalent débitera la somme $\dfrac{2e}{R}$.

4. 3 Montrer que le circuit équivalent est composé d'un générateur de tension $\frac{2}{3}e$ en série avec une résistance $\frac{R}{3}$ et un condensateur C

En associant les trois résistances R ainsi que les deux générateurs de courants, on peut ainsi aboutir à un circuit série comportant un générateur de Thévenin de fem $\frac{2e}{R} \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3}e$ en série avec une résistance $\frac{R}{3}$ et le condensateur

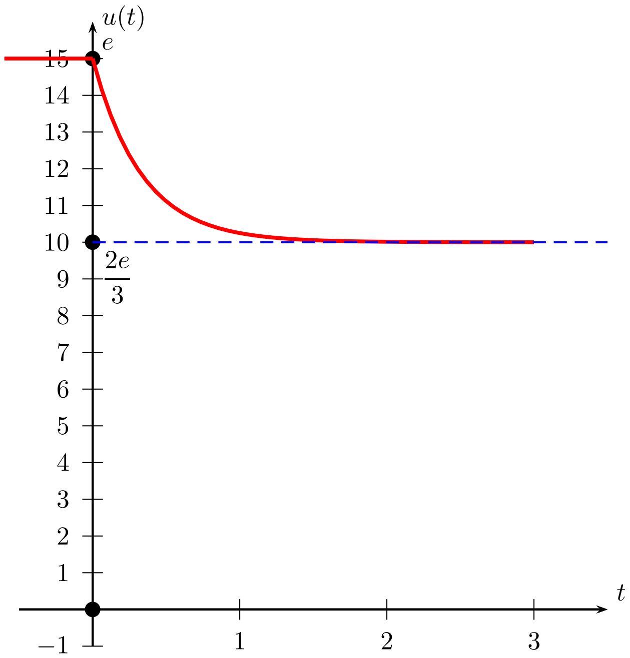
4. 4 Etablir l'équation différentielle en $u(t)$ (aux bornes du condensateur) : *en écrivant la loi des mailles sur le circuit série, on a $\frac{R}{3}i + \frac{q}{C} = \frac{2}{3}e$, avec $u(t) = \frac{q}{C}$ donc l'équation différentielle est $\dfrac{du}{dt} + \dfrac{3}{RC}u = \dfrac{2}{RC}e$*

4. 5 Etablir ensuite l'expression de $u(t)$: *la solution de l'équation différentielle est $u(t) = \frac{2}{3}e + K.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \dfrac{RC}{3}$ et $u(0) = e$.*

La solution simplifiée est donc $u(t) = \dfrac{2e}{3} + \dfrac{e}{3}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

4. 6 Tracer $u(t)$ et expliquez pourquoi on avait supposé la continuité de q en $t = 0$.

Le condensateur se décharge lors de la fermeture de l'interrupteur :

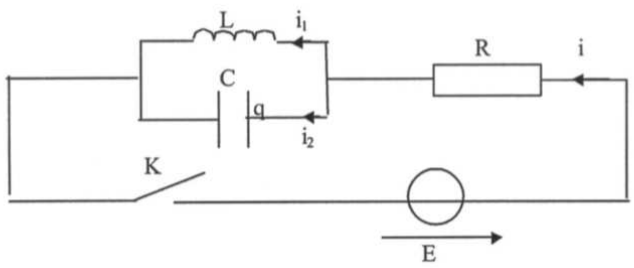


Données : $R = 10\,k\Omega$, $C = 100\,\mu F$ et $e = 15\,V$

Continuité de $q(t)$?

L'énergie $\dfrac{q^2}{2C}$ stockée dans le condensateur est continue donc $q(t)$ également.

Exercice 5. Régime transitoire d'un circuit RLC non série



On considère le montage ci-dessus où l'on a imposé $\tau = RC = \frac{L}{R}$.
A $t = 0$ on ferme l'interrupteur, le condensateur étant initialement déchargé.

5. 1 Etablir l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ (les coefficients de cette équation seront exprimés en fonction de τ) :

on écrit la loi des noeuds, puis deux lois des mailles, ainsi qu'une relation entre i_C et la charge q du condensateur. $\boxed{\text{J'entoure}}$ les étapes de simplification.

$$\begin{cases} (1) \quad i = i_L + i_C \\ (2) \quad E = R i + \dfrac{q}{C} \\ (3) \quad \dfrac{q}{C} = L\dfrac{di_L}{dt} \\ (4) \quad i_C = \dfrac{dq}{dt} \\ (5) \quad i \end{cases}$$

L'équation (2) devient : $E = R\left(i_L + \dfrac{dq}{dt}\right) + \dfrac{q}{C}$. *On voit que l'équation à notre disposition pour continuer à faire apparaitre q est (3) qui oblige donc à dériver (2) :* $0 = R\left(\dfrac{di_L}{dt} + \dfrac{d^2q}{dt^2}\right) + \dfrac{1}{C}\dfrac{dq}{dt}$ *ce qui permet d'aboutir à* $0 = \dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q$ *donc* $\boxed{0 = \dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{dq}{dt} + \omega_0^2 q}$

5. 2 Exprimer les conditions initiales en q et $i = dq/dt$; résoudre en exprimant $q(t)$:

nous devons chercher à écrire deux conditions initiales, car l'équation différentielle étant du 2ème ordre, nous avons deux constantes d'intégration (k_1 et k_2 dans la résolution ci-dessous).

La solution de l'équation

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$

avec $2\lambda = \dfrac{1}{\tau}$, *est donc de la forme*

$$q(t) = e^{-\lambda t}\ (k_1\ \sin(\Omega\, t) + k_2\ \cos(\Omega\, t))$$

en posant $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ *en supposant que l'amortissement est faible (on est alors donc dans le cas d'un régime pseudo-périodique amorti avec* $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$*)*

Le condensateur est initialement déchargé donc

$$q(0^+) = q(0^-) = 0$$

car la charge est continue dans la branche d'un condensateur.

On en déduit ensuite $\dot{q}(0^+)$ en remplaçant $q(0^+)$ dans les équations différentielles (qui sont valables à n'importe quel instant $t \geq 0$) qui correspondent aux lois des mailles :

$$q(0^-) = \underbrace{q(0^+) = 0}_{\textit{condition imposée}} \quad \textit{et} \quad \underbrace{i_L(0^-) = 0}_{\textit{interrupteur ouvert depuis longtemps}}$$

$$i(0^+) = i_L(0^+) + i_C(0^+) = \underbrace{0}_{i_L\,\textit{continue}} + i_C(0^+) = 0 + \dot{q}(0^+)$$

$$\frac{q(0^+)}{C} = 0 = L\frac{di_L}{dt}(0^+)$$

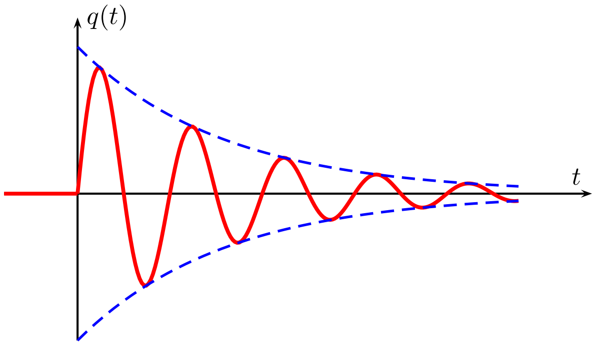
$$E = R\,i(0^+) + \frac{q(0^+)}{C} = R\,i(0^+) + 0 \quad \textit{donc} \quad i(0^+) = \frac{E}{R} = \dot{q}(0^+)$$

Etant donné que $q(0) = e^0\,(k_1\ \times 0 + k_2\ \times 1) = k_2 = 0$, on avait déjà une des constantes.
En dérivant $q(t)$, et en l'écrivant en $t = 0$, on a pour la seconde constante :

$$\dot{q}(t) = \frac{d}{dt}\left(k_1 e^{-\lambda t}\sin\Omega t\right) = k_1\left(-\lambda\sin\Omega t + \Omega\cos\Omega t\right) \Rightarrow \dot{q}(0^+) = \frac{E}{R} = k_1\left(-\lambda \times 0 + \Omega \times 1\right) \Rightarrow k_1 = \frac{E}{R\Omega}$$

On a donc trouvé ainsi la 2ème constante d'intégration, ce qui permet de donner la solution :

$$q(t) = e^{-\lambda\,t}\frac{E}{R\Omega}\sin\Omega t$$



La pseudo-période du tracé est $T = \dfrac{2\pi}{\Omega}$

5. 3 Donner les relations permettant d'en déduire i_2, i_1 et i :
on part de la connaissance de l'expression de q(t).

$$i_2 = i_C = \frac{dq}{dt}$$

$$Ri = E - \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$i_1 = i_L = i - \frac{q}{C}$$

14 Rôle générique pour l'étude des régimes périodiques forcés

15 Signaux sinusoïdaux

15.1 Amplitude, phase, pulsation et fréquence

15.2 Valeur moyenne et valeur efficace

15.3 Notation complexe

15.4 Représentation de Fresnel

16 Étude du RLC série

16.1 Régime sinusoïdal forcé

16.2 Simplification apportée par la notation complexe

16.3 Réponse en intensité - Résonance d'intensité

16.4 Réponse en charge - Résonance de tension aux bornes du condensateur

17 Impédance

17.1 Définition

17.2 Dipôles R, L et C

17.3 Générateurs

18 Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé

18.1 Loi des noeuds

18.2 Loi des mailles

18.3 Association série - Diviseur de tension

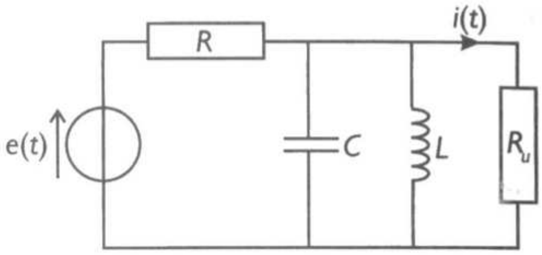
18.4 Générateurs équivalents de Thévenin et Norton

19 Puissance en régime sinusoïdal forcé

19.1 Puissance instantanée - Puissance moyenne - Facteur de puissance

19.2 Notation complexe

Exercice 6. Régime permanent sinusoïdal



On considère le montage ci-dessus où l'on a imposé $e(t) = E_m \cos(\omega t)$.
On se place en régime PERMANENT d'un régime sinusoïdal forcé.

Résolution

Le système d'équations de Kirchhoff utilise 4 intensités inconnues. Il faut donc 4 équations. Le système est donc un peu complexe. Il vaut mieux utiliser les théorèmes simplificateurs : diviseur de tension, diviseur de courant, équivalents de Thévenin et Norton, loi des noeuds...
Il s'agit d'être rapide.
Il conviendra également d'associer L et C en une impédance équivalente Z_e dès le début.

6. 1 Etablir l'expression de la tension $u = R_u \times i$ en fonction de R, R_u, L, C, E_m et ω, en utilisant les différentes méthodes suivantes :

(a) diviseur de courant

AIDE : on note Z_{eq} l'association parallèle des trois dipôles R_u, C et L et on note $Z_1//Z_2 = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$ l'impédance de l'association parallèle de Z_1 et Z_2.

Le diviseur de courant donne directement (sachant que i_e dans la branche de e est $i_e = \dfrac{e}{R + Z_{eq}}$)

alors $i = i_e \times \dfrac{L//C}{R_u + L//C}$.

On écrit que $L//C$ a une impédance $Z_{LC} = \dfrac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \dfrac{Z_L Z_C Y_C}{Y_C Z_L + Y_C Z_C} = \dfrac{Z_L}{Z_L Y_C + 1} = \dfrac{j\,\omega\,L}{1 - \omega^2\,C\,L}$.

Ainsi, on peut en déduire que $i = i_e \times \dfrac{Z_{LC}}{R_u + Z_{LC}} = \dfrac{R_u\,\omega\,L}{j\,R_u\,\omega^2\,C\,L + \omega\,L - j\,R_u} \times i_e$.

Pour l'expression de Z_{eq}, on a trois dipôles en parallèle, donc le dipôle Z_{LC} en parallèle avec R_u, ce qui donne donc $Z_{eq} = \dfrac{Z_{LC} R_u}{Z_{LC} + R_u} = \dfrac{R_u\,\omega\,L}{j\,R_u\,\omega^2\,C\,L + \omega\,L - j\,R_u}$.

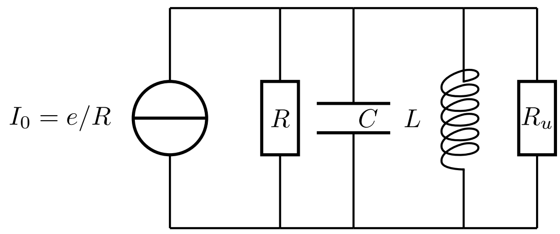
On a donc $u = R_u \times i = R_u \times \dfrac{Z_{LC}}{Z_{LC} + R_u} \times i_e = \dfrac{R_u Z_{LC}}{Z_{LC} + R_u} \times i_e = Z_{eq} \times \underbrace{\dfrac{e}{R + Z_{eq}}}_{i_e}$

Le calcul donne ensuite :

$$u = R_u \times i = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \times e = \frac{1}{RY_{eq} + 1} \times e = \frac{R_u\,\omega\,L}{j\,R_u\,\omega^2\,C\,L\,R + \omega\,L\,R - j\,R_u\,R + R_u\,\omega\,L} \times e$$

(b) équivalents de Thévenin et Norton :

En option :



On associe ensuite R, C et L pour former un dipôle $Z_2 = \dfrac{Z_{LC}R}{Z_{LC} + R}$

(c) diviseur de tension (attention au piège)

Attention, le diviseur de tension implique d'utiliser deux dipôles en série parcourus par LE MÊME COURANT, ce qui est de cas de R et Z_{eq} *(mais pas le cas de R et* R_u*) :*

$$u = R_u \times i = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + R} \times e$$

ce qui donne ensuite le même résultat qu'avec le diviseur de courant.

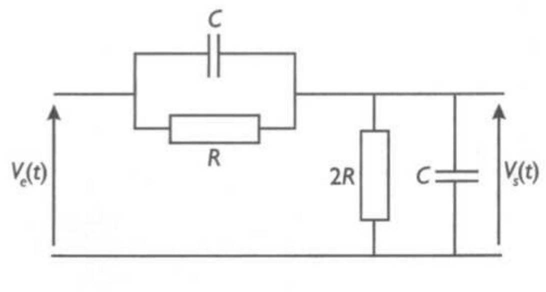
6. 2 Quel est le déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$?

Si, si, c'est simple, en fait. ☺

Ce sera plus dur de répondre à l'expression du déphasage entre $i(t)$ *et* $e(t)$

$u = R_u \times i$ *donc le déphasage est nul ici.*

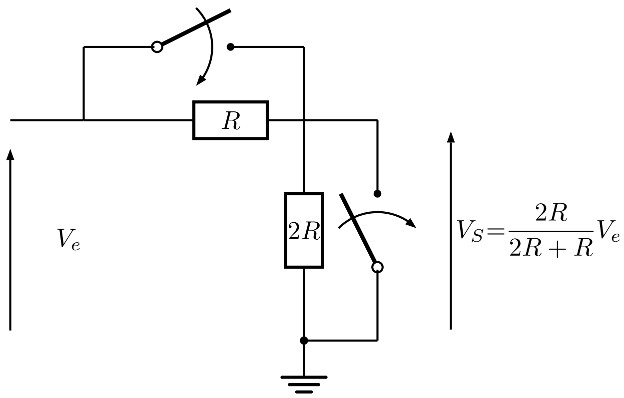
Exercice 7. Notion de filtre



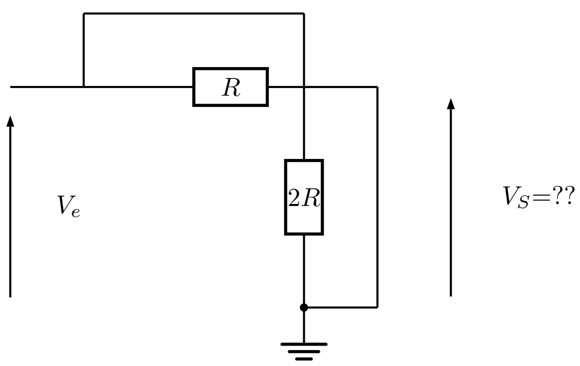
On considère le montage ci-dessus où l'on a imposé $V_e(t) = E\cos(\omega t)$.
On se place en régime PERMANENT d'un régime sinusoïdal forcé.

7. 1 Prévoir le comportement du filtre à basse et à haute fréquence sans calcul (étudier les limites $\omega \to \infty$ et $\omega \to 0$) :

Commençons par le cas de $\omega \to 0$, correspondant à un condensateur équivalent à un interrupteur ouvert.



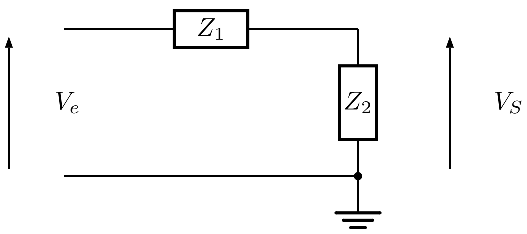
Pour le cas $\omega \to \infty$, on :



On voit à droite que la tension V_S aux borne d'un fil doit être nulle, alors qu'à gauche le fil impose que $V_e = V_S$, ce qui nous donne une indétermination car $V_e \neq 0$.
Ceci correspond à un des (rares) cas où la modélisation par dipôles équivalents "fil" ou "interrupteur ouvert" ne convient pas (un peu comme une forme indéterminée en 0 de $\dfrac{\sin x}{x}$ qui donnerait $\dfrac{0}{0}$! On doit alors faire appel ici aux DL pour dire que $\sin x \approx x$ en zéro donc la fraction tend vers 1).

7. 2 Etablir l'expression de la tension V_S en fonction de R, C, ω et V_e en utilisant diviseur de tension. Donner l'expression de la fonction de transfert $H = \frac{V_S}{V_e}$ sous la forme $H = H_0 \frac{1+\frac{j\omega}{\omega_2}}{1+\frac{j\omega}{\omega_1}}$ et vous exprimerez ω_1 et ω_2 en fonction des données

Le circuit peut se ramener au cas classique auquel on peut appliquer la formule du diviseur de tension :



L'impédance Z_1 est constituée de $C//R$ donc $Z_1 = \frac{Z_C R}{Z_C + R} = -\frac{j\,R}{\omega\,C\,R - j}$ par exemple après simplification, en se rappelant que $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$. Néanmoins, je rappelle qu'il est souvent plus simple de penser à utiliser $Y_C = \frac{1}{Z_C}$ dans les calculs pour les simplifier car $Y_C = jC\omega$ est plus simple à manipuler. Ainsi, on chercherait à dire d'abord $Z_1 = \frac{Z_C R}{Z_C + R} \times \frac{Y_C}{Y_C} = \frac{Z_C Y_C R}{Y_C Z_C + R Y_C} = \frac{R}{1 + R Y_C} = \boxed{\frac{R}{1+jRC\omega}}$. Plus simple, non ?

Pour l'expression de Z_2, on a la mise en parallèle de $2R$ et C donc $Z_2 = \frac{2 Z_C R}{Z_C + 2R} = -\frac{2\,j\,R}{\omega\,C\,\left(2\,R - \frac{j}{\omega\,C}\right)}$, non encore simplifié.

Là encore, on peut tout d'abord écrire $Z_2 = \frac{2Z_C R}{Z_C + 2R} = \frac{2 Z_C Y_C R}{Y_C Z_C + 2 R Y_C} = \frac{2R}{1 + 2RY_C} = \boxed{\frac{2R}{1+2jRC\omega}}$. Plus simple, non ?

L'utilisation du diviseur de tension donne :

$V_S = V_e \times \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_e \times \frac{1}{Z_1 Y_2 + 1}$, *avec* $Y_2 = \frac{1+2jRC\omega}{2R}$ *donc* $V_S = V_e \times \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = V_e \times \frac{1}{\frac{R}{1+jRC\omega}\frac{1+2jRC\omega}{2R} + 1}$

donc $V_S = V_e \times \frac{1+jRC\omega}{R\frac{1+2jRC\omega}{2R} + 1 + jRC\omega} = V_e \times \frac{1+jRC\omega}{\frac{1}{2} + 1 + 2jRC\omega} = V_e \times \frac{2}{3} \times \frac{1+jRC\omega}{1+\frac{4}{3}jRC\omega}$.

Par le calcul direct, vous avez peut-être trouvé l'expression (identique) sous la forme

$$H = \frac{2\,(\omega\,C\,R - j)}{4\,\omega\,C\,R - 3\,j}$$

La fonction de transfert est donc $H = \boxed{\frac{V_S}{V_e} = \frac{2}{3} \times \frac{1+jRC\omega}{1+\frac{4}{3}jRC\omega}} = H_0 \frac{1+\frac{j\omega}{\omega_2}}{1+\frac{j\omega}{\omega_1}}$ *donc* $\boxed{H_0 = \frac{2}{3}}$, $\omega_2 = 1/RC$ *et* $\omega_1 = 3/4RC$

Une fois que l'on a obtenu l'expression de la fonction de transfert H, on peut recalculer les limites :
$\lim_{\omega\to\infty} 2\frac{\omega\,C\,R - j}{4\,\omega\,C\,R - 3\,j} = \frac{1}{2}$. *De même,* $\lim_{\omega\to 0} 2\frac{\omega\,C\,R - j}{4\,\omega\,C\,R - 3\,j} = \frac{2}{3} = H_0$

7. 3 Quel est le déphasage entre V_S et V_e ?

C'est TRES important de se souvenir de ce genre de calcul

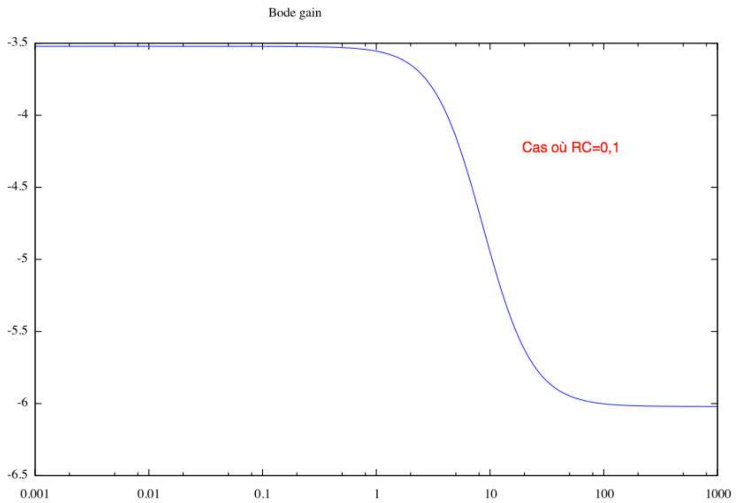
Le déphasage est φ qui vérifie $\varphi = arg(V_S) - arg(V_e) = 0 + arg(1 + jRC\omega) - arg(1 + \frac{4}{3}jRC\omega)$

En effet, $V_e = V\cos\omega t$ par exemple, et $V_S = V'\cos(\omega t + \varphi)$ qui devient en complexes, $V_e = Ve^{j\omega t}$ et $V_S = V'e^{j(\omega t+\varphi)}$

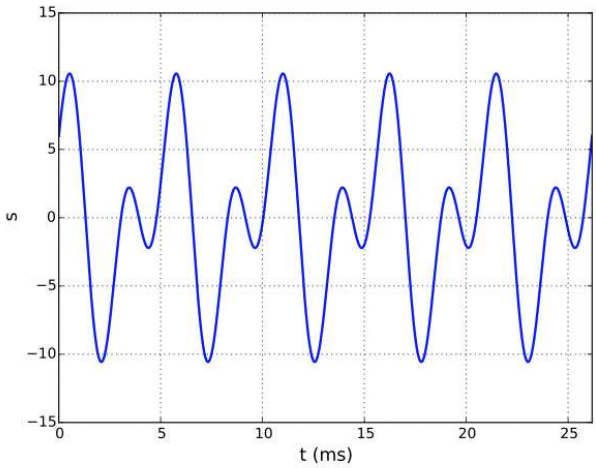
7. 4 Tracer le diagramme de Bode en remarquant que la fonction de transfert est un produit de fonctions de transfert connues. On tracera G_{dB} en fonction de $\log\omega$, c'est à dire que la pulsation ω_1 est la pulsation de référence :

le tracé du diagramme de Bode est complet ici. Le tracé asymptotique aurait comporté les deux demi-droites horizontales.

Le produit RC est pris ici égal à 0,1.



Exercice 8. Action sur le spectre de Fourier



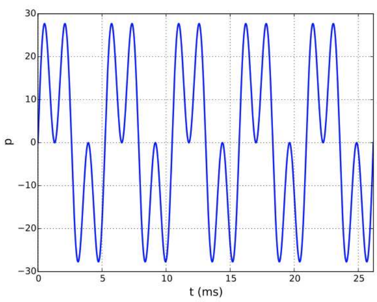
$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

Soit deux signaux sinusoïdaux : $s_1(t) = s_m cos(\omega t)$ et $s_2(t) = s_m sin(2\omega t)$ où $\omega = 1200\, rad.s^{-1}$ et $s_m = 6V$.

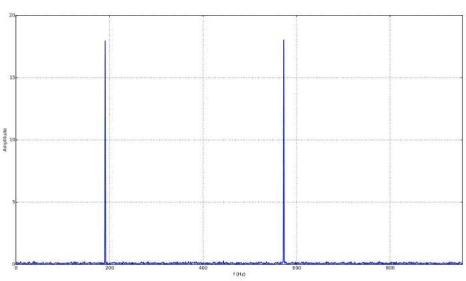
8. 1 On considère la somme $s(t)$ des ces deux signaux (voir le graphique ci-dessus).
Le signal $s(t)$ est-il périodique ?
Représenter le spectre fréquentiel (de Fourier) de $s(t)$:
le signal est très visiblement périodique sur le schéma.
Le signal est $s(t) = s_m \cos(\omega t) + s_m \sin(2\omega t)$ qui est donc directement le développement en série (finie, ici) de Fourier du signal. Le spectre comporte donc deux pics en ω et 2ω.

8. 2 On considère le produit $p(t)$ de ces deux signaux.
Calculer $p(t)$:
on écrit directement le produit $p(t) = s_1 \times s_2 = s_m^2 \cos(\omega t)\sin(2\omega t)$
On donne le spectre de $p(t)$ ci-dessous. Déterminer les composantes harmoniques contenues dans $p(t)$ (le spectre) :
on utilise alors les développements trigonométriques.
$p(t) = 2s_m^2 \cos^2(\omega t) \times \sin(\omega t)$ *en sachant que* $\cos^2\theta = \dfrac{1}{2}(cos(2\theta) + 1)$,
on peut en déduire que $p(t) = A(\sin(3\omega t) + \sin(\omega t))$

$\boxed{\text{On peut donc en déduire que le spectre de Fourier du produit } p(t) \text{ comporte deux pics à } \omega \text{ et } 3\omega}$



$p(t) = s_1(t).s_2(t)$



Spectre du signal p