L'indispensable à connaître pour bien démarrer la seconde année...

Formule du binôme de Newton : Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{C},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\ .$$

Formule également vérifiée pour deux matrices carrées A et B qui commutent.

Formule de factorisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{C}, \qquad a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\ .$$

Formule également vérifiée pour deux matrices carrées A et B qui commutent.

Relation d'Euler : $\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Formules d'Euler : $\forall\ \theta \in \mathbb{R},\ \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Formule de De Moivre : $\forall\ n \in \mathbb{Z},\ \forall\ \theta \in \mathbb{R},\ (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Factorisation à connaître : $e^{it} + 1 = e^{it/2}(e^{it/2} + e^{-it/2}) = 2\cos(t/2)e^{it/2}$

Factorisation à connaître : $e^{ia} + e^{ib} = e^{i(a+b)/2}(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2}) = 2\cos((a-b)/2)e^{i(a+b)/2}$

Méthode à connaître :

$x \neq 0[2\pi]$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \mathrm{Re} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \mathrm{Re}\, \frac{1 - \left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1 - e^{ix}} = \dots$

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées, opposées :

$$a \in \mathbb{C}^*,\ a = re^{i\theta},\ r > 0,\ \theta \in \mathbb{R}\ :\ z^2 = a \iff z = \sqrt{r}e^{i\theta/2}\ ,\ z = -\sqrt{r}e^{i\theta/2}$$

Racines n^{imes} de l'unité :

$$z^n = 1 \iff z = \omega_k = e^{2ik\pi/n},\ k \in [![0, n-1]\!].$$

Racines n^{imes} d'un nombre complexe a :

$$z^n = a \iff z = z_0\omega_k = z_0 e^{2ik\pi/n},\ k[\![0, n-1]\!],$$

où z_0 est une solution (particulière) de $z^n = a$.

Soient $A(a),\ B(b),\ C(c)$ trois points distincts du plan complexe. Alors :

▷ A, B, C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.

▷ $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Inégalités triangulaires (réels et complexes) :

$$\forall\ x, y \in \mathbb{C},\ \big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$.

Formule du triangle de Pascal :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, k \in [\![0, n-1]\!],\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Une suite réelle (u_n) est *majorée* ssi : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.

Une suite réelle (u_n) est *minorée* ssi : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.

Une suite réelle (u_n) est *bornée* ssi : $\exists\, k \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq k$.

Une suite (u_n) est *arithmétique* ssi : $\exists\, r \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.

Une suite (u_n) est *géométrique* ssi : $\exists\, q \in \mathbb{R},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \times q$.
Une suite (u_n) est *à récurrence linéaire d'ordre deux* si il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On considère alors l'équation caractéristique $(C)\ : r^2 - ar - b = 0$ et on calcule $\Delta = a^2 - 4b$.
Sur $\mathbb{R}$:
- Si $\Delta > 0$: (C) admet deux racines distinctes r_1 et r_2.
  Donc il existe λ et μ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
- Si $\Delta = 0$: (C) admet une racine double r. Donc il existe λ et μ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r^n$.
- Si $\Delta < 0$: (C) admet deux racines complexes conjuguées $re^{\pm i\theta}$.
  Donc il existe λ et μ tels que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n \Big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\Big)$.

Sur $\mathbb{C}$: il n'y a que deux cas : $\Delta = 0$ ou $\Delta \neq 0$.

Soient (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon\ .$$
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff \forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ u_n \geq A\ .$$
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff \forall\, A \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq N \ \Rightarrow\ u_n \leq A\ .$$

<u>Théorème de la limite monotone :</u> Si (u_n) est une suite réelle monotone, alors (u_n) possède une limite.
Plus précisément : Si (u_n) est croissante et majorée, alors (u_n) converge. Si (u_n) est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Si (u_n) est décroissante et minorée, alors (u_n) converge. Si (u_n) est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$. On appelle suite extraite toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

(u_n) et (v_n) sont *adjacentes* ssi (u_n) croissante, (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $f : D \to D,\ D$ partie de $\mathbb{R}$.
▷ Soit $g(x) = f(x) - x$. L'étude du signe de g permet d'étudier la monotonie de (u_n) :
⋆ Si $g \geq 0$ sur D, alors (u_n) est croissante.
⋆ Si $g \leq 0$ sur D, alors (u_n) est décroissante.
De plus, si f est continue et (u_n) converge vers $L \in D$, alors L est un point fixe de f (i.e. $f(L) = L$), donc on peut rechercher les zéros de g afin de trouver des candidats pour une limite éventuelle.
▷ Si f est croissante, alors (u_n) est monotone. Son sens de variation dépend de la position de u_0 et u_1.
▷ Si f est décroissante, alors (u_{2n}) et (u_{2n+2}) sont monotones, de sens contraire. Leurs sens de variation

dépendent de la position de u_0 et u_2.
▷ On utilise la Thm de la convergence monotone et la convergence vers point fixe pour conclure.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, (v_n) étant non nulle à partir d'un certain rang.

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow \text{ la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ est bornée.}$$

$$u_n = o(v_n) \Leftrightarrow \text{ la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ tend vers zéro.}$$

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \text{ la suite } \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ tend vers 1.}$$

Caractérisation séquentielle de la continuité : Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$.
f est continue en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) de points de I qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La partie entière de x est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On la note $\lfloor x \rfloor$.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
▷ A est *majorée* si : $\exists\ M \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in A,\ x \leq M$. Dans ce cas, on dit que M est *un majorant* de A.
La borne supérieure de A, notée $Sup(A)$, est le minimum de l'ensemble des majorants, si il existe.
$C = Sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} C \text{ est un majorant de } A \\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ a \in A,\ C - \varepsilon < a \end{cases}$.
Caractérisation séquentielle : $C = Sup(A)$ si et seulement si C est un majorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers C.
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
▷ A est *minorée* si : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in A,\ x \geq m$. Dans ce cas, on dit que m est *un minorant* de A.
La borne inférieure de A, notée $Inf(A)$, est le maximum de l'ensemble des minorants, si il existe.
$D = Inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} D \text{ est un minorant de } A \\ \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ a \in A,\ D + \varepsilon > a \end{cases}$.
Caractérisation séquentielle : $D = Inf(A)$ si et seulement si D est un minorant de A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers C.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Soit $f : E \to F,\ A \subset E$ et $B \subset F$.
Image directe de A : $f(A) = \{f(x);\ x \in A\} = \{y \in F;\ \exists\ x \in A,\ y = f(x)\}$
Image réciproque de B : $f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$ (f n'a pas besoin d'être bijective)

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

▷ f est *injective* ssi : $\forall\ (x, x') \in E^2,\ x \neq x' \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(x')$.
▷ f est injective ssi : $\forall\ (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \ \Rightarrow\ x = x'$.
▷ f est *surjective* ssi : $\forall\ y \in F,\ \exists\ x \in E,\ y = f(x)$.
▷ f est bijective ssi f est injective et surjective.
▷ f est *bijective* ssi : $\forall\ y \in F,\ \exists !\ x \in E,\ y = f(x)$.

Soit $f : I \to \mathbb{R},\ a \in I \cup bI$ et $\ell \in \mathbb{R}$ (bI désigne l'ensemble des bornes finies de I).

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\ .$$

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *dérivable en* $x_0 \in I$ ssi la limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ ssi la limite $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est finie.

Théorème des bornes atteintes : Toute fonction continue sur un segment y est bornée et atteint ses bornes.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$.
Toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f en au moins un point de $[a; b]$.

Théorème de la bijection :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur I. On pose $J = f(I)$.
Alors :

1. J est un intervalle.
2. La fonction $f : I \to J$ est bijective.
3. La fonction $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone de même sens que f.
4. La fonction $f^{-1} : J \to I$ est continue.
5. Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont, dans un repère normé, symétriques par rapport à $(\Delta)\ :\ y = x$.

Soit $f : I \to J$ bijective, dérivable et telle que f' ne s'annule pas sur I.
Alors f^{-1} est dérivable sur J et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Théorème de Rolle :
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors : $\exists\ c \in]a; b[,\ f'(c) = 0$.

Égalité (théorème) des accroissements finis :
Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$.
Alors : $\exists\ c \in]a; b[,\ \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Inégalité des accroissements finis :
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I à dérivée bornée.
Alors : $\forall\ x, y \in I\ \ |f(x) - f(y)| \leq \sup\limits_I |f'| \times |x - y|$.

Formule de Taylor avec reste-intégrale : (Non exigible)
Soient $n \in \mathbb{N},\ f \in C^{n+1}(I)$ et $a \in I$.
Alors : $\forall\ x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x - t)^n\, dt$.

Inégalité de Taylor-Lagrange : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^{n+1}.
On suppose que $f^{(n+1)}$ est bornée sur I : $\exists\ M_{n+1} \in \mathbb{R}_+,\ \forall\ x \in I,\ |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$.
Alors : $\forall\ a, b \in I,\ \left|f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b - a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leq \frac{|b - a|^{n+1}}{(n + 1)!} M_{n+1}$.

Formule de Taylor-Young : Soient $n \in \mathbb{N},\ f \in C^n(I)$ et $a \in I$.
Alors : $f(x) \underset{a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o\big((x - a)^n\big)$.

Théorème de la limite de la dérivée : Soit f une fonction continue sur I, dérivable sur $I \backslash \{a\}$ et telle que $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.
En particulier, si $l \in \mathbb{R}$ f est dérivable sur I tout entier et f' est continue en a.

Sommes de Riemann :
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* lorsque :

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ \forall\ \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Le graphe d'une fonction convexe est en dessous de ses sécantes.
Si f est convexe et dérivable, son graphe est au dessus de ses tangentes.
Inégalités des trois pentes : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
f est convexe ssi $\forall\ (a,b,c) \in I^3$ tq $a < b < c$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \dfrac{f(c)-f(b)}{b-c}$.
Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si f' est croissante.
Si f est deux fois dérivable, f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Les fonctions usuelles :
▷ La fonction ln est définie, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln(x^n) = n\ln(x)$.
$\forall\ x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

▷ La fonction exponentielle est définie, strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,\ \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$
$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{Z},\ exp(x+y) = exp(x)exp(y)$ et $exp(nx) = \Big(exp(x)\Big)^n$.
$\forall\ x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

▷ $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^a := exp(a\ln(x))$ (il s'agit d'une notation).
$\forall\ x,\ y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall\ a,\ b \in \mathbb{R},\ x^a y^a = (xy)^a,\ x^a x^b = x^{a+b},\ (x^a)^b = x^{ab}$.
⋆ Si $a > 0 : x \mapsto x^a$ est strictement croissante, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^a = 0,\ \lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$.
⋆ Si $a < 0 : x \mapsto x^a$ est strictement décroissante, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^a = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} x^a = 0$.

▷ Croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,\ \lim_{x\to0} x\ln(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.$
Plus généralement :
$\forall\ a,\ b \in \mathbb{R}_+^*,\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0,\ \lim_{x\to0} x^a|\ln(x)|^b = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty,\ \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$

▷ La fonction *Arccos* est définie et continue sur $[-1,1]$, à valeurs dans $[0,\pi]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
La fonction *Arcsin* est définie et continue sur $[-1,1]$, à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Elle est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
La fonction *Arctan* est définie et continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

$\triangleright\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2},\ th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}.$
La fonction ch est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée sh.
La fonction sh est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée ch.
La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\dfrac{1}{ch^2}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} ch(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1.$
$\lim\limits_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} sh(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} th(x) = -1.$

$\triangleright$ Division euclidienne de polynômes :

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X],\ B \neq O : \exists!\ (Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2,\ A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

$\triangleright$ Racine d'un polynôme : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P ssi $P(\alpha) = 0$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P ssi $\exists\ Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine simple de P ssi $X - \alpha \mid P$ et $(X-\alpha)^2$ ne divise pas P.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine simple de P ssi $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre au moins $k \in \mathbb{N}^*$ de P ssi $(X-\alpha)^k \mid P$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre au moins $k \in \mathbb{N}^*$ de P ssi $P(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre exactement $k \in \mathbb{N}^*$ de P ssi $(X-\alpha)^k \mid P$ et $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas$P$.
$\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre exactement k de P ssi $P(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

$\triangleright$ Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont ceux de degré un.
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont ceux de degré un et ceux de degré deux à $\Delta < 0$.

$\triangleright$ Soit $P = aX^2 + bX + c,\ a \neq 0$.
La somme des racines de P vaut $-\dfrac{b}{a}$; leur produit vaut $\dfrac{c}{a}$.
Théorème de d'Alembert-Gauss :
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ des fonctions rationnelles à pôles simples.

Définition d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E : voir le cours pour les dix axiomes.

F est un sev de E ssi : $F \neq \emptyset,\ F \subset E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x, y \in F,\ \lambda x + y \in F$.

F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E :

$$\begin{aligned} E = F \oplus G \quad &\iff \forall\ x \in E,\ \exists!\ (x_F, x_G) \in F \times G,\ x = x_F + x_G \\ &\iff E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0\}. \end{aligned}$$

Si $\dim E$ finie : $E = F \oplus G \iff \dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0\}$.

Le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $v_1, ..., v_p$ est :

$$Vect(v_1, \ldots, v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p;\ \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}\}.$$

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application $f : E \to F$ est *linéaire* ssi $\forall\ \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\ x, y \in E,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.
Une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Soit $f \in L(E,F)$.
Le noyau de f est $Kerf = \{x \in E;\ f(x) = 0\}$
L'image de f est $Imf = \{f(x);\ x \in E\} = \{y \in F;\ \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$.
Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans E.
Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.

On appelle *hyperplan* d'un espace vectoriel E le noyau d'une forme linéaire non nulle.
Si H est un hyperplan de E et $\mathcal{D}$ une droite de E non incluse dans H, alors $E = H \oplus \mathcal{D}$.

Une application $p : E \to E$ est un *projecteur* de E ssi $p \in L(E)$ et $p \circ p = p$.
On a alors $E = Kerp \oplus Imp$.

Une application $s : E \to E$ est une *symétrie vectorielle* de E ssi $s \in L(E)$ et $s \circ s = Id_E$.
On a alors $E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E)$.

Soient $v_1, .., v_p$ des vecteurs de E.
$(v_1, \ldots, v_p)$ est libre ssi $\big(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0\big)$.

$(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E ssi $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p) = E$.
$(v_1, \ldots, v_p)$ est génératrice de E ssi $\forall\ x \in E,\ \exists\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$.

$(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de E ssi $\forall x \in E,\ \exists!\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$.
$(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de E ssi elle est libre et génératrice.
Un espace vectoriel est *de dimension finie* s'il possède une famille génératrice finie.

Théorème de la base extraite : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. De toute famille génératrice, on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en une base de E.

Théorème du rang : Soit $f \in L(E,F)$, $\dim E$ finie.
Alors :
$$\dim E = \dim Kerf + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim Kerf + \mathrm{rg}\, f.$$

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

La matrice d'une application linéaire dans des bases fixées (départ et arrivée) est constituée en colonnes par les coordonnées dans la base d'arrivée des images des vecteurs de la base de départ.

Formule vectorielle contravariante de changement de bases :
$$\text{Si } X = Mat_B(x),\ X' = Mat_C(x),\ P = P_{B \to C}, \text{ alors } X' = P^{-1}X.$$
Formule matricielle contravariante de changement de bases : soit $f \in L(E)$:
$$\text{Si } A = Mat_B(f),\ A' = Mat_C(f)\ ,\ P = P_{B \to C}, \text{ alors } A' = P^{-1}AP.$$

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible } (A \in GL_n(\mathbb{K})) \text{ ssi il existe } B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } AB = I_n.$$
$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible } (A \in GL_n(\mathbb{K})) \text{ ssi } DetA \neq 0.$$
$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible } (A \in GL_n(\mathbb{K})) \text{ ssi } \mathrm{rg}\, A = n.$$

Méthodes de calcul des déterminants des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une forme bilinéaire, symétrique, définie positive sur E.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit E un espace préhilbertien réel.
Alors :

$$\forall\ x, y \in E,\ \left| < x, y > \right| \leq \|x\| \times \|y\|$$

avec égalité ssi x et y sont liés.

Inégalité triangulaire : Soit E un espace préhilbertien réel.
Alors :

$$\forall\ x, y \in E,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité ssi x et y sont positivement liés.

Soient $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension p. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormale de F.

Le projeté orthogonal d'un vecteur $x \in E$ sur F est donné par $\pi_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, e_k > e_k$.

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Soient $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel et F un sev de E de dimension p. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base de F. On souhaite construire une base orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ de F à partir de la famille $(v_1, \dots, v_p)$. Voici l'algorithme :
On pose $e_1 = \dfrac{v_1}{||v_1||}$.

Une fois les vecteurs $e_1, \dots, e_k$ construits, on pose $\varepsilon_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, e_i > e_i$ puis $e_{k+1} = \dfrac{\varepsilon_{k+1}}{||\varepsilon_{k+1}||}$.

On poursuit ainsi jusqu'au calcul de e_p .
On obtient une base orthonormale de F qui vérifie pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $< e_k, v_k >> 0$.

On considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$$

Si P est une probabilité uniforme sur Ω, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\quad P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

• **Formule des probabilités composées :**
Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.
Alors :

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

• **Formule des probabilités totales :**
Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements (SCE) tel que $P(A_k) > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Alors : $\forall\ B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\quad P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B) P(A_k)$.

• **Formule de Bayes :** (ou formule des causes)
Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements non négligeables $(P(A) > 0, P(B) > 0)$.
Alors $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$.
Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un SCE, alors pour tout $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) > 0$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)}.$$

Pour une variable aléatoire X, si $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on appelle *espérance de* X le nombre réel défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

La *variance de* X le nombre réel positif ou nul défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = E(X^2) - (E(X))^2$$

L'écart-type de X le nombre réel positif ou nul défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Soient X, Y deux v.a.d. définies sur un même espace probabilisé.
La *covariance de* X, Y est le nombre réel :

$$Cov(X, Y) = E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$.

Loi constante.

$$X(\Omega) = \{\lambda\}, \qquad P(X = \lambda) = 1, \qquad E(X) = E(\lambda) = \lambda,\ V(X) = 0.$$

Loi uniforme.

$$X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad P(X = x_1) = \cdots = P(X = x_n) = \frac{1}{n}.$$

Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ de paramètre $p \in [0; 1]$.

$$X(\Omega) = \{0; 1\}, \qquad P(X = 1) = p,\ P(X = 0) = 1 - p, \qquad E(X) = p,\ V(X) = p(1 - p).$$

Loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n \in \mathbb{N}^*,\ p \in [0; 1]$.
On répète n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in [0; 1]$ et on considère la v.a.r. X qui compte le nombre de succès obtenus à l'issue des n épreuves.

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!],\ \forall\ k \in [\![0, n]\!],\ P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},\ E(X) = np,\ V(X) = np(1 - p).$$

- **Inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle Y :**

$$\forall\ b > 0, \qquad P(|Y| \geq b) \leq \frac{E(|Y|)}{b}.$$

- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire réelle X :**

$$\forall\ a > 0, \qquad P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

Les développements limités usuels.

$$e^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th} x \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$\cos x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \underset{0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \underset{0}{=} 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}) \underset{0}{=} 1 - x^2 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Les formules trigonométriques usuelles.

$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \qquad \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x \qquad \cos(\pi/2 + x) = -\sin x$

$\sin(\pi - x) = \sin x \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad \sin(\pi/2 - x) = \cos x \quad \sin(\pi/2 + x) = \cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x$ (la fonction tan est $\pi-$périodique)

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

$\tan(a + b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \qquad \tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2} \quad \sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \qquad \cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a + b) + \cos(a - b)\big) \qquad \sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\big(\cos(a - b) - \cos(a + b)\big)$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\big(\sin(a + b) + \sin(a - b)\big)$

En posant $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, on a : $\tan\theta = \dfrac{2t}{1 - t^2} \qquad \cos\theta = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \sin\theta = \dfrac{2t}{1 + t^2}$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Inégalité à connaître : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ |\sin(x)| \leq |x|$.

Liste des dérivées usuelles

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$	**Domaine de dérivabilité**
$\alpha x+\beta$	α	$\mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*,\ \alpha\in\mathbb{R}$
$u(x)^\alpha$	$\alpha u'(x)u(x)^{\alpha-1}$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$	
$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\sin u(x)$	$u'(x)\cos u(x)$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\cos u(x)$	$-u'(x)\sin u(x)$	
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$
$\tan u(x)$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}=u'(x)\big(1+\tan^2 u(x)\big)$	
$\operatorname{Arcsin} x,\ \operatorname{Arccos} x$	$\dfrac{\pm 1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$
$\operatorname{Arcsin} u(x),\ \operatorname{Arccos} u(x)$	$\dfrac{\pm u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$	
$\operatorname{Arctan} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Arctan} u(x)$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	
$\operatorname{sh} x,\ \operatorname{ch} x$	$\operatorname{ch} x,\ \operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} u(x),\ \operatorname{ch} u(x)$	$u'(x)\operatorname{ch} u(x),\ u'(x)\operatorname{sh} u(x)$	
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}=1-\operatorname{th}^2 x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} u(x)$	$\dfrac{u'(x)}{\operatorname{ch}^2 u(x)}=u'(x)\big(1-\operatorname{th}^2 u(x)\big)$	
$\big(g\circ f\big)(x)=g\big(f(x)\big)$	$g'\big(f(x)\big)f'(x)$	

Il faut également connaître parfaitement les fonctions usuelles ($\ln, exp$, $\cos$, $\sin$, $\tan$, $Arccos$, $Arcsin$, $Arctan$, ch, s
domaine de définition, de dérivabilité, dérivée, graphe, propriétés...