



## COURS DE MÉCANIQUE CLASSIQUE

## MOUVEMENTS À FORCE CENTRALE

Ce chapitre présente une application importante des lois vues jusqu'ici : les mouvements à force centrale. Après quelques généralités, on aborde le problème de l'interaction newtonienne et notamment celui du mouvement des planètes qui fit le succès de la théorie de Newton.

**Forces centrales #1 - Introduction****— LOIS DE CONSERVATION —**

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à une force centrale *conservative* de centre  $O$ , point fixe d'un référentiel galiléen. Nous allons voir que le problème se résout grâce à deux relations de conservation.

## GÉNÉRALITÉS

Rappelons qu'une force est dite centrale quand la droite support de cette force passe constamment par un point fixe O. Si l'on repère la position de M à l'aide d'un système de coordonnées sphériques d'origine O, on a

$$\vec{f} = f(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

La force est attractive quand  $f < 0$ , répulsive dans l'autre cas. Si la force centrale est conservative alors  $f(r, \theta, \varphi)$  ne peut dépendre que de  $r$ . En effet, son travail élémentaire vaut

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = f(r, \theta, \varphi) dr$$

forme différentielle qui doit être différentielle totale exacte. Ceci n'est possible que si  $f(r, \theta, \varphi)$  ne dépend que de  $r$ . Dans ce cas, l'énergie potentielle associée ne dépend que de  $r$  et vérifie

$$d\mathcal{E}_p(r) = -f(r) dr \quad \heartsuit$$

### INTERACTION GRAVITATIONNELLE

La force de gravitation entre un astre fixe (massif) situé en O, à symétrie sphérique de masse  $m_1$  et un astre mobile à symétrie sphérique de masse  $m_2$  vaut, d'après la loi de gravitation universelle

$$\vec{f}_{12} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad \Longrightarrow \quad d\mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2} dr$$

d'où l'on tire l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r} + C^{\text{te}} \quad \heartsuit$$

### INTERACTION COULOMBIENNE

La force électrostatique entre une charge ponctuelle fixe (charge électrique  $q_1$ ) et une charge ponctuelle mobile (charge  $q_2$ ) est une force centrale et s'écrit

$$\vec{f}_{12} = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

Lorsque  $q_1$  et  $q_2$  sont de même signe, la force est répulsive. C'est aussi une force conservative, d'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + C^{\text{te}} \quad \heartsuit$$

#### 💡 Remarques

- Ces deux forces centrales varient comme l'inverse du carré de la distance : elles sont dites *newtoniennes*
- On choisit souvent la convention  $\mathcal{E}_p \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ , ce qui permet de poser  $C^{\text{te}} = 0$ .

## CONSERVATION DU MOMENT CINÉTIQUE

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, un point matériel soumis à une force centrale dans un référentiel galiléen voit son moment cinétique  $\vec{L}_O$  se conserver :

$$\frac{d\vec{L}_O(\text{M})}{dt} = r \vec{u}_r \wedge f(r) \vec{u}_r = \vec{0} \quad \implies \quad \vec{L}_O(\text{M}) = \vec{C}^{\text{te}}$$

ce qui a trois conséquences :

1. le mouvement est plan ;
2. en coordonnées polaires, la conservation du moment cinétique se traduit par la relation

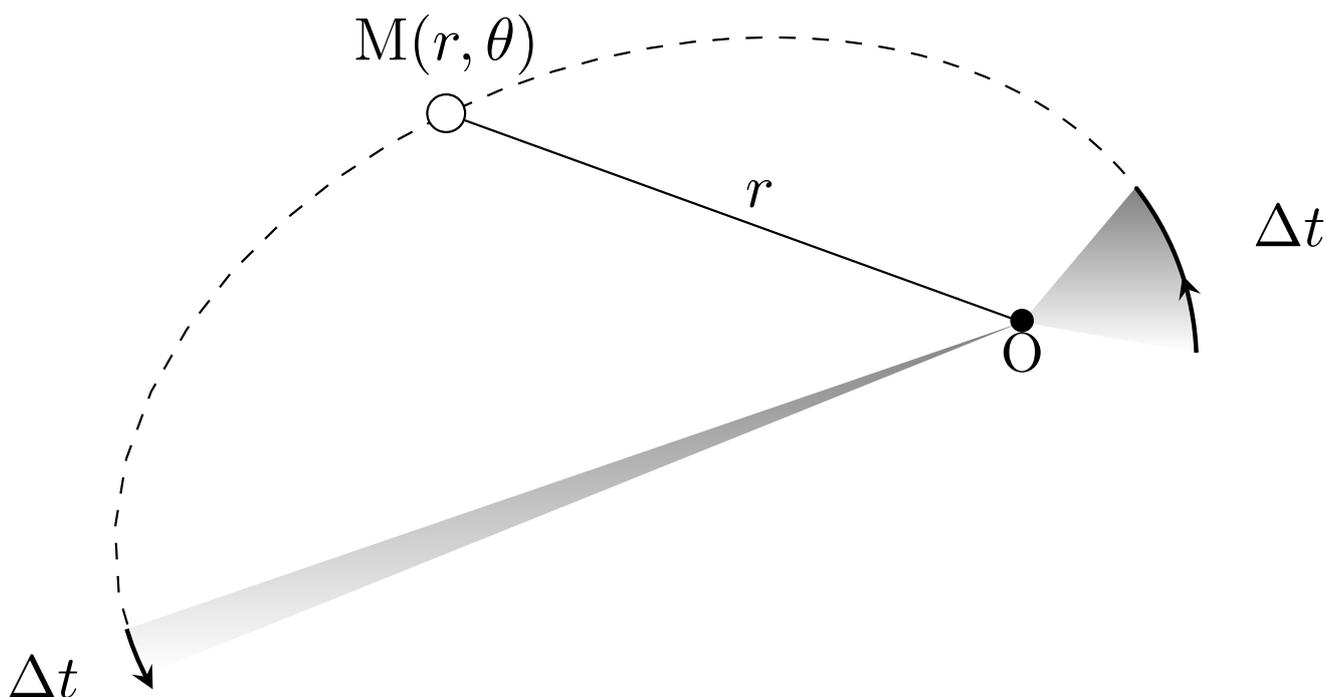
#### ♥ Loi des aires

$$(1) \quad r^2 \dot{\theta} = C$$

où  $C$  est la constante des aires déterminée par les conditions initiales ;

3. l'aire balayée par le vecteur  $\vec{OM}$  par unité de temps est constante et égale à  $C/2$  (vitesse aréolaire) :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$



**Fig. 1-** Loi des aires : pour des durées égales, l'aire balayée par le rayon vecteur est la même.

## CONSERVATION DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE

La force étant conservative, l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_m = C^{\text{te}}$$

En coordonnées polaires, le carré de la vitesse s'écrit, en utilisant l'équation (1) ,

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

ce qui donne une intégrale première

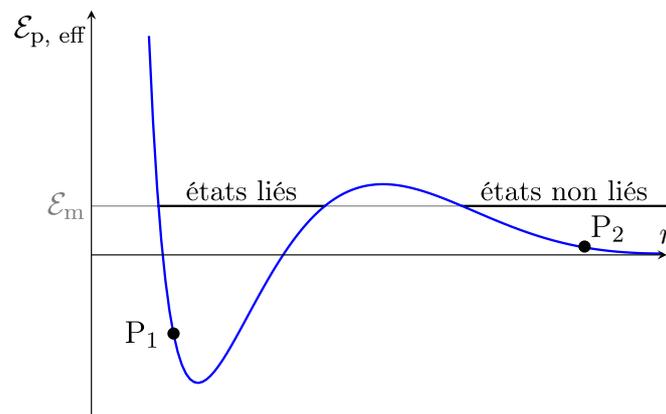
### ♥ Conservation de l'énergie

$$(2) \quad \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r) = \mathcal{E}_m$$

Formellement, le problème est analogue à l'étude d'un point matériel à un degré de liberté ( $r$ ) plongé dans un champ de force d'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

Finalement la résolution de l'équation différentielle (2) donne  $r(t)$  puis  $\theta(t)$  en utilisant l'équation (1). On peut donc - en principe - trouver la trajectoire de M, soit de façon analytique quand l'équation différentielle est soluble, soit de façon numérique. Cependant, sans résoudre complètement le problème, on peut faire une analyse qualitative à partir du profil de  $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)$ . En effet, la forme de l'énergie potentielle effective permet de savoir si la particule restera confinée autour du centre O ou s'en éloignera au bout d'un certain temps.



**Fig. 2-** Exemple de profil énergétique à un puits. Suivant la valeur de l'énergie mécanique, les valeurs de  $r$  sont bornées ou pas.

Par exemple, supposons que l'énergie potentielle effective ait l'allure représentée sur la figure ci-dessous.

Deux cas se présentent alors.

1. Si les conditions initiales sont représentées par un point  $P_1$  d'énergie  $\mathcal{E}_m$  situé dans un puits, alors  $r(t)$  oscille entre deux valeurs. Et comme  $r^2\dot{\theta} = C$ ,  $\theta(t)$  augmente ou diminue suivant le signe de  $C$ . Ainsi, le point matériel décrit une orbite plus ou moins complexe autour du centre d'attraction. On dit que la particule est dans un **état lié**. Notons que si  $P_1$  possède une énergie mécanique correspondant à la valeur du fond du puits de potentiel,  $r$  reste constant au cours du temps ainsi que  $\dot{\theta}$ . Le mouvement est alors circulaire uniforme.

2. Si les conditions initiales sont représentées par un point  $P_2$  situé en dehors du puits de potentiel, alors, après un éventuel rapprochement du centre d'attraction jusqu'à une distance d'approche minimale  $r_{\min}$ , le corps va s'éloigner indéfiniment du centre de force ; on dit que la particule est dans un **état de diffusion** ou **état non lié**.

## THÉORÈME DE BERTRAND

Lorsque le profil de  $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)$  présente un puits de potentiel, il existe une valeur  $r_0$  de  $r$  pour laquelle la trajectoire est circulaire. Cette valeur est donnée par le minimum de  $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}(r)$  obtenue en annulant la fonction dérivée :

$$(3) \quad \mathcal{E}'_{p, \text{eff}}(r) = -\frac{mC^2}{r^3} + \mathcal{E}'_p(r) = 0 \quad \implies \quad mC^2 = r_0^3 \mathcal{E}'_p(r_0)$$

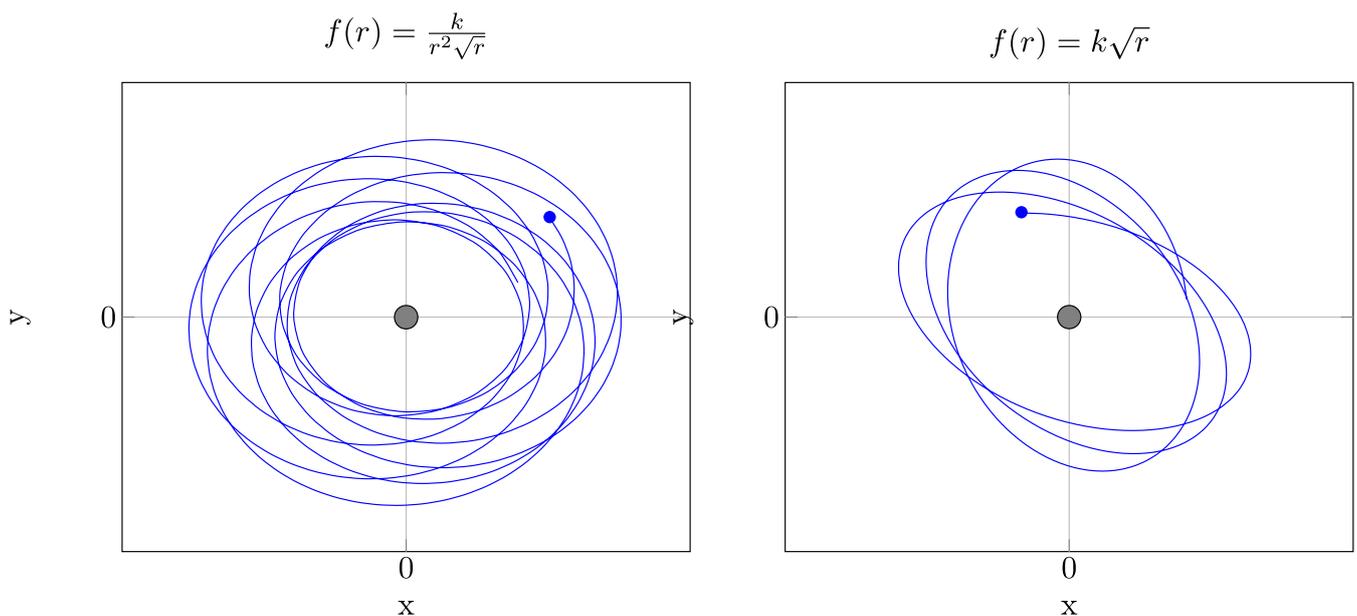
Le mouvement est uniforme puisque  $r_0^2 \dot{\theta} = C$  et la période orbitale vaut

$$T_{\text{orb}} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi r_0^2}{C}$$

Imaginons maintenant que le corps en mouvement reçoive une petite quantité d'énergie de telle sorte que l'orbite circulaire est perturbée : la distance  $r$  va osciller autour de  $r_0$  avec une période d'oscillation  $T_{\text{osc}}$  donnée par la formule

$$(4) \quad T_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{\kappa}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu = m \\ \kappa = \mathcal{E}''_{p, \text{eff}}(r_0) \end{cases}$$

Or, en général,  $T_{\text{orb}}$  et  $T_{\text{osc}}$  sont dans des rapports quelconques de sorte que la trajectoire, bien que liée, ne se referme pas sur elle-même. La figure ci-dessous montre quelques exemples d'orbites.



**Fig. 3-** Exemples d'orbite d'un corps soumis à une force centrale  $f(r) = \frac{k}{r^p}$  avec  $p = 2, 5$  et  $p = -0, 5$ .

Il existe cependant des cas où, quelles que soient les conditions initiales (en restant dans le cas où la trajectoire est bornée), ce rapport est commensurable :  $T_{\text{osc}}/T_{\text{orb}} = m/n$  avec  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . En d'autres termes, après  $n$  révolutions,  $r(t)$  oscille exactement  $m$  fois ; la trajectoire se referme alors parfaitement. Analysons par exemple le cas de la force képlérienne  $f = -k/r^2$  de potentiel  $\mathcal{E}_p = -k/r$ . L'équation (3) donne

$$r_0 = \frac{mC^2}{k} \quad \text{et} \quad T_{\text{orb}} = 2\pi \frac{m^2 C^3}{k^2}$$

De la même manière, l'équation (4) donne

$$T_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}''}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{3mC^2/r_0^4 - 2k/r_0^3}} = 2\pi \frac{m^2 C^3}{k^2}$$

Ainsi, on trouve  $T_{\text{osc}} = T_{\text{orb}}$ . En d'autres termes, faiblement perturbée, l'orbite circulaire devient une orbite qui se referme après une révolution ; nous verrons qu'il s'agit d'une ellipse.

Joseph Bertrand se posa la question de la fermeture des trajectoires dans un cadre beaucoup moins restrictif que le notre (notre raisonnement n'est valable que pour de petites perturbations au voisinage de  $r_0$ ) et trouva un résultat remarquable qu'il envoya à l'académie des sciences. Ce court article [1] fut publié en 1873 et montre le théorème suivant :

### ♥ Théorème de Bertrand

Il n'y a que deux types de forces centrales conservatives pour lesquelles les états liés sont fermés c'est-à-dire périodiques :

- la force centrale newtonienne  $f = -k/r^2$ . Dans ce cas, les orbites liées sont des ellipses dont l'un des foyers est O.
- la force élastique isotrope  $f = -kr$ . Les orbites liées sont également des ellipses mais cette fois-ci centrées en O.

## — LE PROBLÈME DE KEPLER —

Le problème de Kepler fait référence à l'étude du mouvement d'une planète sphérique de masse  $m$  soumise à l'attraction gravitationnelle de la part d'une étoile de masse  $m_*$  considérée **fixe et à symétrie sphérique**. La seule force est centrale, newtonienne et attractive :

$$\vec{f} = -\frac{Gm m_*}{r^2} \vec{u}_r$$

Bien entendu, tout corps de masse  $m$  lié gravitationnellement à un astre fixe de masse  $m'$  est soumis aux lois de Kepler ; il suffit alors de remplacer  $m m_*$  par  $m m'$ .

### LOIS DE KEPLER

## Histoire



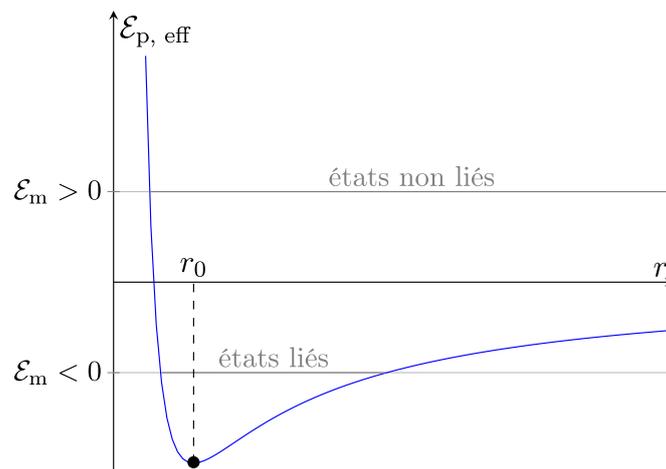
C'est en 1609 que l'astronome allemand Johannes Kepler (1571–1630) publie son ouvrage *Astronomia Nova* (Astronomie Nouvelle) dans lequel il énonce les deux premières lois qui portent maintenant son nom. Il découvre ses lois grâce à Tycho Brahé, expérimentateur hors pair, qui fit des observations très précises, ceci sans l'aide d'aucun d'instrument d'optique. En étudiant le mouvement de la Terre autour du Soleil, Kepler découvre d'abord la loi des aires. C'est en étudiant le mouvement de la planète Mars autour du Soleil qu'il découvre la première loi. Comme souvent lors de grandes découvertes, la chance a joué un rôle non négligeable : d'une part, Kepler fit de nombreuses erreurs dans ses raisonnements qui heureusement se sont compensées ; d'autre part, la mise en évidence du mouvement elliptique a été favorisée par la grande excentricité de l'orbite de Mars (l'orbite de Mars est 5 fois plus excentrique que celle de la Terre). La troisième loi ne fut découverte qu'en 1618.

Les trois lois sur le mouvement des astres du système solaire, dites *lois de Kepler*, s'énoncent ainsi :

1. Les planètes parcourent des orbites planes, elliptiques. Le Soleil occupe l'un des foyers de l'ellipse.
2. En des durées égales, les planètes balayent des aires égales.
3. Le rapport du carré de la période de rotation au cube du demi-grand axe est identique pour toutes les planètes du système solaire.

Ces trois lois permettront à Newton de confirmer sa théorie du mouvement des corps (*Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* 1687). Nous avons déjà vu comment la deuxième loi est une conséquence de la conservation du moment cinétique, voyons comment dériver les deux autres lois à partir des lois de Newton.

## CAS DU MOUVEMENT CIRCULAIRE



Le profil de l'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r}$$

montre que les états liés sont possibles.

Si l'énergie mécanique correspond à la valeur minimale de  $\mathcal{E}_{p, \text{eff}}$ , alors  $r$  reste constant au cours du temps et l'orbite est circulaire. On voit de plus que cette orbite circulaire est stable. Supposons donc que M décrit une orbite circulaire de rayon  $r_0$ . En vertu de la conservation du moment cinétique, on a

$$r_0^2 \dot{\theta} = C$$

ce qui implique que le mouvement est circulaire uniforme (vitesse angulaire constante). La relation fondamentale de la dynamique appliquée à M donne

$$ma = m \frac{v^2}{r_0} = \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r_0^2}$$

Il vient alors

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_\star}{r_0}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_p$$

la vitesse décroît quand  $r_0$  croît.

La période de révolution est reliée au rayon orbital par  $2\pi r_0 = vT$  puisque le mouvement est uniforme. Il vient, en élevant au carré :

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}m_\star}{4\pi^2}$$

relation qui donne une version simplifiée de la troisième loi de Kepler.

Enfin l'énergie mécanique est constante et égale à

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{\mathcal{E}_p}{2} = -\frac{\mathcal{G}mm_\star}{2r_0}$$

## ENSEMBLE DES TRAJECTOIRES SOLUTIONS

L'orbite circulaire est donc une solution stable particulière. L'ensemble des trajectoires possibles s'obtient à partir des deux relations de conservation :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r} = \mathcal{E}_m \\ r^2\dot{\theta} = C \end{cases}$$

Il est alors judicieux de procéder au changement de variable  $u = \frac{1}{r}$  afin d'obtenir l'équation polaire de la trajectoire, à savoir la relation  $r(\theta)$ . On a

$$\dot{r} = \frac{d(1/u)}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -C \frac{du}{d\theta}$$

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mC^2 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{mC^2u^2}{2} - \mathcal{G}mm_\star u = \mathcal{E}_m \\ \dot{\theta} = Cu^2 \end{cases}$$

Si l'on dérive la première relation par rapport à  $\theta$  il vient

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}m_\star}{C^2}$$

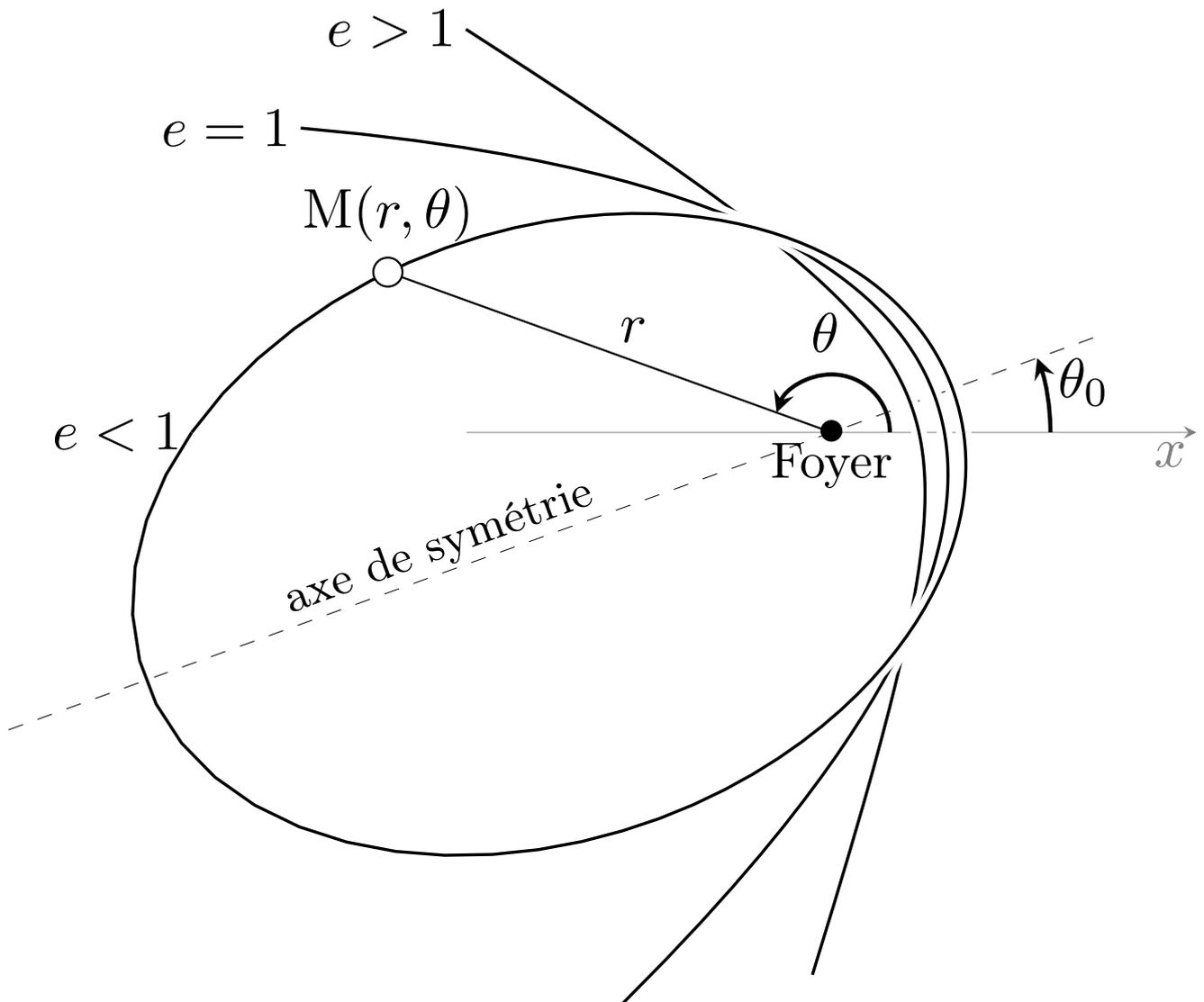
équation différentielle linéaire avec un second membre constant dont la solution s'écrit

$$u(\theta) = \frac{\mathcal{G}m_\star}{C^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_\star} \\ e \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation polaire  $r(\theta)$  d'une conique de paramètres  $p$  et  $e$  dont l'origine  $O$  est l'un des foyers et dont l'axe focal est la droite  $\theta = \theta_0$ . La trajectoire est donc une conique de foyer le centre d'attraction et dont la forme dépend des conditions initiales puisque  $p$  et  $e$  en dépendent. Suivant la valeur de  $e$ , on aura des états liés (l'ellipse pour  $e < 1$ ) ou des états de diffusion (la parabole pour  $e = 1$  ou l'hyperbole pour  $e > 1$ ). Les planètes, confinées autour du Soleil, décrivent ainsi une ellipse de foyer le centre du Soleil.



**Fig. 4-** Les différentes trajectoires képlériennes en fonction de l'excentricité  $e$ . On peut noter que les trajectoires se coupent lorsque  $\theta - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$  ; dans ce cas  $r = p$ .

On peut noter que l'équation (5) ne permet pas d'avoir l'équation horaire de l'astre. Il faudrait pour cela connaître l'évolution de l'angle  $\theta$  au cours du temps. Cependant, la loi des aires  $\dot{\theta} = C/r^2$  se met sous la forme  $\dot{\theta} = f(\theta)$  — équation différentielle ordinaire du premier ordre — qu'il est toujours possible de résoudre par une approche numérique.

## TROISIÈME LOI DE KÉPLER

La troisième loi est une conséquence des deux premières et ne s'applique que pour les mouvements elliptiques. Tout d'abord la loi des aires se traduit par

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2} \implies \frac{\mathcal{A}}{T} = \frac{C}{2}$$

où  $T$  est la période orbitale et  $\mathcal{A}$  l'aire de l'ellipse. Les mathématiques donnent  $\mathcal{A} = \pi ab$  où  $a$  et  $b$  sont le grand et le petit-axe de l'ellipse. De plus,  $b = \sqrt{ap}$  de sorte que si l'on élève au carré la loi des aires, on obtient

$$\frac{\pi^2 a^3 p}{T^2} = \frac{C^2}{4}$$

Or, selon la solution générale (5)  $p = C^2 / \mathcal{G}m_*$  d'où l'on déduit la fameuse formule

### ♥ 3ème loi de Kepler (1618)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}m_*}{4\pi^2}$$

En d'autres termes, le rapport  $a^3/T^2$  est identique pour toutes les planètes du système solaire comme l'avait constaté Kepler. La contribution de Newton est de relier cette loi à la constante de gravitation universelle et la masse du Soleil.

#### Application

La troisième loi de Kepler relie une distance, un temps et une masse. Il est donc possible de «peser» un astre en mesurant une distance et un temps ! On peut ainsi «peser» le Soleil à partir de la période orbitale de la Terre

$$T = 1 \text{ an} = 365,26 \text{ jours solaires}$$

et du demi grand-axe de l'orbite terrestre (qu'il est possible de déterminer par une mesure de parallaxe)  $a = 149,6 \cdot 10^6$  km. La troisième loi donne donc

$$m_* = 4\pi^2 \frac{(149,6 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times (365,26 \times 24 \times 3600)^2} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

#### 💡 Remarque

L'étude de la trajectoire des satellites artificiels a permis de mesurer *via* la troisième loi de Kepler, la

constante  $\mathcal{G}m_T = 398600,44 \text{ km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$  avec  $m_T$  masse de la Terre [7]. Cependant, on ne connaît ni  $\mathcal{G}$ , ni  $m_T$  avec une telle précision...

## ENERGIE

Allons au delà des lois de Kepler et montrons que l'énergie mécanique s'exprime simplement en fonction du grand-axe de la conique.

Reprenons les expressions de  $r$  et de  $\dot{r}$  (par souci de simplification on choisit l'axe  $Ox$  de façon à ce que  $\theta_0 = 0$ ).

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \dot{r} = -C \frac{du}{d\theta} = \frac{Ce \sin \theta}{p} \end{cases}$$

pour les substituer dans l'énergie mécanique. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}mm_\star}{r} \\ &= \frac{1}{2} mC^2 \left[ \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} + \frac{e^2 \sin^2 \theta}{p^2} \right] - \frac{\mathcal{G}mm_\star(1 + e \cos \theta)}{p} \\ \mathcal{E}_m &= \frac{mC^2}{2p^2} (1 + e^2 + 2e \cos \theta) - \frac{\mathcal{G}mm_\star(1 + e \cos \theta)}{p} \end{aligned}$$

Or,  $C^2 = \mathcal{G}m_\star p$  d'où

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}mm_\star}{2p} (1 - e^2)$$

On peut alors distinguer trois cas.

1. Pour une hyperbole,  $e > 1$  et  $\mathcal{E}_m > 0$ . Les états ne sont pas liés et le corps s'éloigne indéfiniment du centre d'attraction avec une énergie cinétique non nulle lorsque  $r \rightarrow \infty$ . Le grand axe d'une hyperbole vaut  $a = p/(e^2 - 1)$  d'où

$$\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{G}mm_\star}{2a} \quad [\text{hyperbole}]$$

2. Pour une parabole,  $e = 1$  et  $\mathcal{E}_m = 0$ , ce qui signifie que le corps va s'éloigner du centre avec une vitesse qui tend vers 0 lorsque  $r \rightarrow \infty$ .

3. Pour une ellipse,  $e < 1$  et  $\mathcal{E}_m < 0$  : le corps est lié à l'astre central. Pour une ellipse, le grand axe vaut  $a = p/(1 - e^2)$  ce qui donne

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}mm_\star}{2a} \quad [\text{ellipse}]$$

On pourra retenir que dans le cadre du problème de Kepler, l'énergie mécanique d'une planète en orbite autour d'une étoile de masse  $m_\star$  vaut

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m m_\star}{2a} \quad \heartsuit$$

### Exercice

En 1843, une comète est passée extrêmement près du Soleil puisque son périhélie (péricentre autour du Soleil) se situait à  $d_p = 5,53 \cdot 10^{-3}$  u.a. En considérant que son orbite est parabolique, calculer la vitesse  $v_{\max}$  de la comète au périhélie. On donne la vitesse de la Terre :  $u = 30 \text{ km.s}^{-1}$ .

Rép. — La trajectoire étant parabolique, l'énergie mécanique de la comète est nulle :

$$E_m = 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_\star}{r} \quad \Longrightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_\star}{d_p}}$$

Par ailleurs, d'après la troisième loi de Kepler, on a

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M_\star}{4\pi^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{G}M_\star = a u^2$$

$$\text{Finalement, } v_{\max} = u \sqrt{\frac{2}{d_p/a}} = 30 \sqrt{\frac{2}{5,53 \cdot 10^{-3}}} = 570 \text{ km.s}^{-1}.$$

## VITESSES COSMIQUES

Supposons que l'on veuille envoyer un satellite S de masse  $m$  en orbite autour de la Terre. Pour cela, on utilise un lanceur qui, dans une phase propulsive, donne l'énergie suffisante au satellite. Lorsque le satellite se détache du lanceur à la hauteur  $h$ , il entre dans la phase balistique avec une certaine vitesse  $v$  et une énergie  $\mathcal{E}_m$ . Si l'on assimile la Terre à un astre à symétrie sphérique de masse  $m_T$  et de rayon  $R_T$ , on a (L'altitude  $h$  est suffisamment basse pour avoir  $h \ll R$  et suffisamment haute pour négliger les frottements dus à une atmosphère très raréfiée) :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}m m_T}{R_T + h} \simeq \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}m m_T}{R_T}$$

Deux cas limites se présentent.

- $\mathcal{E}_m \geq 0$  : la trajectoire n'est pas liée et le satellite s'éloigne indéfiniment de la Terre . Dans .....

ce cas, on a

$$v \geq v_{\text{lib}} = \sqrt{2gR_T} \approx 11 \text{ km.s}^{-1}$$

Ce qui définit la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$ .

•  $\mathcal{E}_m < 0$  : la trajectoire est une ellipse de foyer le centre de la Terre. Pour éviter une collision avec la terre, le périhélie de l'orbite doit se situer à une distance  $r_{\text{min}} = a(1 - e) > R_T$ . Il faut donc communiquer une énergie

$$\mathcal{E}_m = -\frac{\mathcal{G}m m_T}{2a} > -\frac{\mathcal{G}m m_T}{2R_T}(1 - e)$$

Dans le cas d'une orbite circulaire - cas où l'énergie minimale est la plus faible - on a

$$\mathcal{E}_m > -\frac{\mathcal{G}m m_T}{2R_T}$$

Condition qui, traduit en termes de vitesse, donne

$$v \geq v_{\text{sat}} = \sqrt{gR_T} \approx 8 \text{ km.s}^{-1}$$

ce qui définit la vitesse de satellisation  $v_{\text{sat}}$ .

Notez que ces vitesses ne dépendent pas de la masse. Elles concernent aussi bien les astres que les molécules.

#### Exercice

On admet qu'un corps de masse  $M$  agit comme un trou noir si la vitesse de libération à sa surface dépasse la vitesse de la lumière dans le vide. Montrer que cela se produit lorsque le rayon de l'astre est inférieur à un certain rayon critique  $R_c$  appelé rayon de Schwarzschild que l'on calculera pour la Terre. On donne  $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Rép. — Un astre se comporte comme un trou noir quand la vitesse libération dépasse  $c$  soit

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R}} > c \implies R < \frac{2\mathcal{G}M}{c^2}$$

Pour la Terre, on trouve

$$R < \frac{2\mathcal{G}M_T}{c^2} = 9 \text{ mm}$$

Application : l'échappement de Jeans

Ce phénomène est à l'origine de l'évaporation thermique des atmosphères planétaires. En effet, dans une atmosphère à la température  $T$ , les particules ont une vitesse moyenne de l'ordre de

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

où  $M$  est la masse molaire de la molécule et  $R$  la constante de gaz parfaits. Cette vitesse est en général inférieure à la vitesse de libération  $v_{\text{lib}}$  de la planète. Cependant, la probabilité de trouver une molécule ayant une vitesse  $v > v_{\text{lib}}$  augmente avec la température. Ces molécules rapides sont donc susceptibles de quitter l'atmosphère à condition de ne pas rencontrer d'obstacle sur leur chemin qui risquerait de les ramener vers la planète. C'est précisément ce qui se produit en haute atmosphère (exosphère) où la température est élevée et les collisions rares. Ainsi les molécules les plus légères ( $v_{\text{th}} \propto 1/\sqrt{M}$ ) quittent l'atmosphère ceci à un rythme d'autant plus important que la gravité est faible et que la température est forte.

Ce phénomène est par exemple la cause de la pauvreté en hydrogène des planètes telluriques (Mars, Terre, Vénus). Le composé le plus abondant de l'univers,  $\text{H}_2$ , bien que produit continuellement par le volcanisme, n'est qu'un composé mineur de ces planètes. Il est aussi à l'origine de la disparition complète de l'atmosphère sur Mercure et sur la Lune.

## EQUATION HORAIRE

Le problème de Kepler n'est pas complètement résolu au sens où nous n'avons trouvé que l'ensemble des trajectoires. Il nous reste à préciser le mouvement de  $M$  le long de cette trajectoire, c'est-à-dire à trouver la relation entre  $\theta$  et le temps  $t$ . Il est commode de fixer l'origine des temps lorsque  $M$  se situe au péricentre ( $\theta(0) = \theta_0$ ).

Dans la cas d'une orbite fermée de période  $T$  on définit la vitesse angulaire moyenne

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi}{T}$$

reliée à la loi de Kepler par  $\bar{\omega}^2 a^3 = \mathcal{G}m_*$ .

## CAS DU CERCLE

Lorsque l'orbite est circulaire de rayon  $r_0$  nous avons montré que  $M$  décrit l'orbite à une vitesse angulaire constante  $\dot{\theta} = \bar{\omega}$ . Ainsi, le mouvement de l'astre est régi par l'équation horaire

$$\begin{cases} r &= r_0 \\ \theta &= \bar{\omega}t + \theta_0 \end{cases}$$

## CAS DES FAIBLES EXCENTRICITÉS

**Tab. 1-** Quelques éléments d'orbites des principales planètes du système solaire

Planète	grand-axe $a$ [ua]	Excentricité $e$
Mercure	0,387	0,2056
Vénus	0,723	0,0068
Terre	1,000	0,0167
Mars	1,524	0,0934
Jupiter	5,203	0,0485
Saturne	9,555	0,0555
Uranus	19,218	0,0463
Neptune	30,110	0,0090

Comme le montre le tableau, les planètes du système solaire ont une trajectoire elliptique de faible excentricité. On peut dans ce cas, approcher l'équation horaire par un développement d'ordre 1 en  $e$ . Pour trouver la relation  $\theta(t)$ , il faut résoudre l'équation différentielle du premier ordre

$$r^2 \dot{\theta} = C \quad \text{avec} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{et} \quad p = \frac{C^2}{\mathcal{G}m_\star}$$

où on a pris soin de choisir l'axe  $Ox$  de façon à avoir  $\theta_0 = 0$ . L'équation différentielle se résout par la méthode de séparation des variables :

$$(6) \quad \int_0^\theta \frac{p^2}{(1 + e \cos \theta')^2} d\theta' = C t$$

Intégrale que l'on approche à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de l'intégrant :

$$(1 + e \cos \theta')^{-2} \simeq 1 - 2e \cos \theta' \quad \text{d'où} \quad p^2(\theta - 2e \sin \theta) \simeq C t$$

De plus,

$$C^2 = p \mathcal{G}m_\star = p \bar{\omega}^2 a^3 = \frac{\bar{\omega}^2 p^4}{(1 - e^2)^3}$$

Finalement, en négligeant  $e^2$  devant 1, on trouve  $C/p^2 \simeq \bar{\omega}$  et l'équation horaire s'écrit

$$\theta - 2e \sin \theta = \bar{\omega}t$$

Ainsi, le mouvement des planètes du système solaire peut être décrit par le système d'équations

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \theta - 2e \sin \theta = \bar{\omega}t \end{cases}$$

On peut poursuivre le développement à l'ordre 1 en  $e$ , en remarquant que  $\theta = 2e \sin \theta + \bar{\omega}t$  et donc que

$$2e \sin \theta = 2e \sin(2e \sin \theta + \bar{\omega}t) = 2e \sin(2e \sin \theta) \cos(\bar{\omega}t) + 2e \sin(\bar{\omega}t) \cos(2e \sin \theta)$$

Si l'on ne garde que les termes d'ordre 1, on trouve

$$2e \sin \theta = 2e \sin(\bar{\omega}t)$$

En conclusion, si l'on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à deux, on trouve

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \theta = \bar{\omega}t + 2e \sin(\bar{\omega}t) \end{cases}$$

### CAS ELLIPTIQUE

Sans se restreindre aux petites excentricités, on peut obtenir l'équation horaire au prix de développements assez calculatoires. On obtient :

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ \tan \theta/2 = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan E/2 \\ E - e \sin E = \bar{\omega}t \end{cases}$$

La variable  $E$  désigne ici l'**anomalie excentrique**. Elle se confond avec  $\theta$  lorsque  $e \rightarrow 0$ . Pour obtenir la position du corps à chaque instant, il est nécessaire de résoudre l'équation transcendante  $E - e \sin E = \bar{\omega}t$  ce qui peut être réalisé grâce à une méthode numérique.

### CAS PARABOLIQUE

Analysons le cas d'un astre sur une orbite parabolique arrivant au péricentre à la vitesse  $v_{\max}$ . Dans le cas,  $e = 1$  et l'équation (6) donne

$$\int_0^\theta \frac{p^2}{(1 + \cos \theta')^2} d\theta' = \int_0^\theta \frac{p^2}{4 \cos^4 \theta'/2} d\theta' = Ct$$

Il est facile de vérifier que la primitive de  $1/\cos^4 x$  est  $\tan x + 1/3 \tan^3 x$  d'où :

$$\tan \theta/2 + \frac{1}{3} \tan^3 \theta/2 = \frac{2C}{p^2} t$$

Lorsque M atteint le péricentre, il se trouve à une distance minimum  $r_{\min} = r(\theta = 0) = p/2$  avec une vitesse maximum  $\vec{v}_{\max}$  perpendiculaire au vecteur position d'où

$$C = r_{\min} v_{\max} = \frac{p v_{\max}}{2}$$

Finalement l'équation horaire d'une orbite parabolique de paramètre  $p$  s'écrit

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + \cos \theta} \\ \tan \theta/2 + \frac{1}{3} \tan^3 \theta/2 = \frac{v_{\max}}{p} t \end{cases}$$

## — INTERACTION COULOMBIENNE —

On se place maintenant dans le cas où une charge ponctuelle fixe  $q_1$  interagit avec une charge mobile  $q_2$  via une force centrale attractive ou répulsive selon le signe du produit des charges.

$$\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

### CAS ATTRACTIF

Considérons dans un premier temps le cas où les deux charges sont opposées. Par exemple le problème de l'électron lié électriquement à un proton 1836 fois plus lourd et donc quasiment fixe, peut être un point de départ pour modéliser l'atome d'hydrogène, si l'on accepte de le décrire dans un cadre newtonien.

Il est clair que le problème mathématique est formellement identique au problème de Kepler, il suffit simplement d'opérer le changement suivant :

$$-\mathcal{G}m m_* \leftrightarrow \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$$

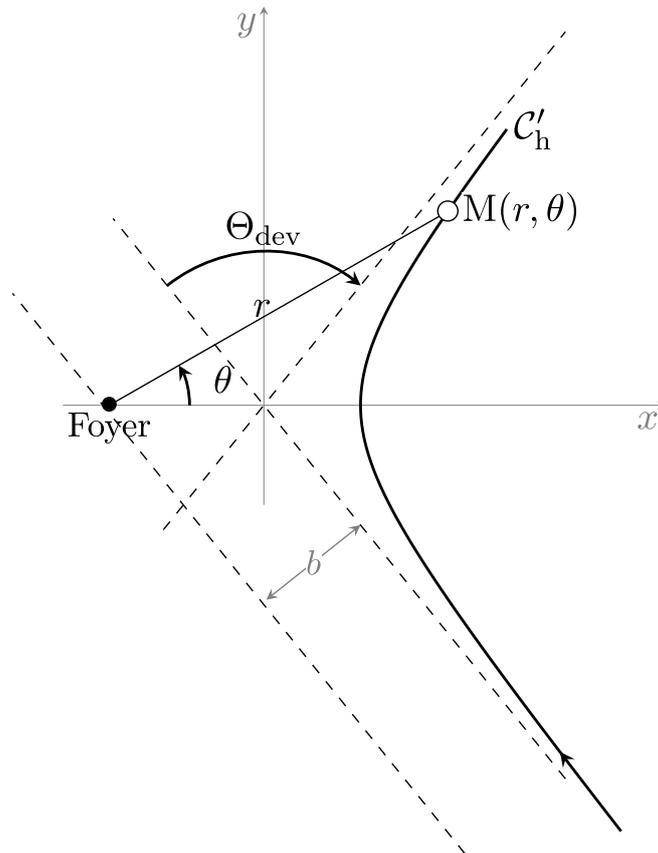
La particule de charge  $q_2$  décrit donc une conique dont un des foyers coïncide avec la charge  $q_1$  et dont l'équation est donnée par

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = -\frac{4\pi\epsilon_0 m C^2}{q_1 q_2} \\ e \geq 0 \end{cases}$$

et l'énergie vaut

$$\mathcal{E}_m = \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 p} (1 - e^2)$$

### CAS RÉPULSIF



**Fig. 5-** Trajectoire hyperbolique dans le cas d'une force newtonienne répulsive.

Plaçons nous dans le cas où les deux charges sont de même signe :  $q_1 q_2 > 0$ . L'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p, \text{eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

étant une fonction monotone décroissante montre que les états liés sont impossibles : la particule chargée, après une éventuelle approche du centre répulsif, va nécessairement s'en éloigner définitivement. En reprenant la démarche utilisée pour le problème de Kepler, on trouve que la solution générale s'écrit

$$r = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) - 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \frac{4\pi\epsilon_0 m C^2}{q_1 q_2} \\ e > 1 \end{cases}$$

Ici  $r > 0$  implique  $e > 1$  : la trajectoire est donc une branche d'hyperbole de paramètres  $p$ , d'excentricité  $e$  et de foyer, le centre répulsif.  $\theta = \theta_0$  correspond à l'axe focal de la branche d'hyperbole. Si l'on fixe l'origine des angles de telle sorte que  $\theta_0 = 0$ , on a

$$r = \frac{p}{e \cos \theta - 1}$$

La différence essentielle par rapport au cas d'un potentiel newtonien attractif est que le point matériel décrit une branche d'hyperbole qui ne contourne pas le centre répulsif.

Ainsi, une particule chargée d'énergie cinétique initiale  $\mathcal{E}_c$  lancée en direction d'une charge fixe, va subir une déflexion... du fait de la répulsion. La trajectoire de la particule subit une déviation angulaire  $\Theta_{\text{dev}}$  qu'il est possible d'exprimer en fonction de  $\mathcal{E}_c$ , des charges en interaction et du demi-petit axe  $b$  que l'on appelle ici le **paramètre d'impact**. Tout d'abord, l'angle  $\Theta_{\text{dev}}$  est lié à l'angle  $\pm\theta_1$  que font les asymptotes. On a

$$\Theta_{\text{dev}} = \pi - 2\theta_1 \quad \implies \quad \tan \theta_1 = \frac{1}{\tan(\Theta_{\text{dev}}/2)}$$

Or, on sait [7] que  $\tan \theta_1 = \sqrt{e^2 - 1}$ . Par ailleurs, la constante des aires vaut

$$C = \|\vec{r} \wedge \vec{v}\|_{r \rightarrow \infty} = b v_\infty \quad \implies \quad p = \frac{4\pi\epsilon_0 m b^2 v_\infty^2}{q_1 q_2}$$

Enfin,  $p = a(e^2 - 1)$  et  $b = a\sqrt{e^2 - 1}$  de telle sorte que

$$\tan \theta_1 = \frac{p}{b} = \frac{4\pi\epsilon_0 m b v_\infty^2}{q_1 q_2}$$

La loi de diffusion de Rutherford est donc donnée par

$$\tan \Theta_{\text{dev}}/2 = \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_c b}$$

Les particules sont d'autant plus diffusées que le paramètre d'impact est faible. Lorsque  $b =$

0, la particule arrive de façon frontale et perd toute son énergie cinétique jusqu'à atteindre la distance minimale d'approche  $d_{\min}$  puis rebrousse chemin, l'énergie potentielle étant convertie en énergie cinétique. On a alors ce que l'on appelle une *rétrodiffusion*. La distance minimale d'approche est donnée par l'égalité entre l'énergie cinétique initiale et l'énergie potentielle en ce point :

$$\mathcal{E}_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{\min}} \implies d_{\min} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_c}$$

### L'expérience de Geiger et Marsden

En 1911 Hans Geiger et Ernest Marsden, sous la direction de Ernst Rutherford, bombardent une mince couche d'or ( $Z = 79$ ) avec un faisceau de particules alpha (noyaux  ${}^4_2\text{He}^{2+}$ ) puis repèrent la direction des particules  $\alpha$  diffusés à l'aide d'un écran de sulfure de zinc ( $\text{ZnS}$ ). La feuille d'or doit être assez mince d'une part pour éviter les diffusions multiples et d'autre part pour que le ralentissement du faisceau soit négligeable. Le faisceau de noyaux  $\alpha$  est produit grâce à une source radioactive (rappelons que la découverte de la radioactivité par H. Becquerel date de 1896) et possède une énergie cinétique  $\mathcal{E}_c = 5$  Mev ce qui donne une distance minimale d'approche

$$d_{\min} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 \mathcal{E}_c} = 45.10^{-15} \text{ m}$$

Or, à l'époque, le modèle atomique qui prévaut dans la communauté scientifique est le modèle de Thomson : l'atome serait une boule de charge positive dans laquelle seraient confinés les électrons. Dans ce cas, les calculs montrent que l'énergie du faisceau  $\alpha$  est trop grande pour observer une rétrodiffusion, c'est pourquoi l'équipe de Rutherford s'attend à observer une faible diffusion de l'ordre de celle que donne le calcul quand on remplace  $b$  par la taille de l'atome ( $\Theta_{\text{dev}} \sim 1/100^\circ$ ). À la grande surprise, un nombre important de particules fortement diffusées est observé ce qui montre que le noyau est confiné au centre de l'atome. Les mesures permettent d'estimer la taille de ce noyau : de l'ordre de 10 fm. En d'autres termes, cette expérience montre la structure composite et lacunaire de l'atome : 99,9999999999% de l'espace est vide !

### POUR EN SAVOIR PLUS...

[1] J. Bertrand, "Mécanique analytique", *C.R. Acad. Sci. Paris*, vol. 77, p49–853, 1873.

[2] L. Valentin, *L'univers mécanique: introduction à la physique et à ses méthodes*. Paris, Hermann, 1983.

[3] H. Krivine, *La Terre, des mythes au savoir*. Cassini, 2011.

[4] A Quedraogo *et al.*, "Généralisation de la méthode de calcul de l'énergie d'un satellite : cas hyperbolique et parabolique", *BUP*, N°764, mai 1994.