Épreuve du mercredi 1er mars 2023 : 4 heures

CONCOURS BLANC DE PHYSIQUE CHIMIE

Corrigé

Partie 1. Etude d'un matériau supraconducteur — inspiré entre autres de E3A 2019

— TYPE CCINP —

Pour commencer, on considère le montage de la figure 1 (qui est souvent qualifié de "trigger de SCHMITT" contrairement à la note de la figure 1 issue du sujet de Concours) où l'amplificateur linéaire (A.L.I.) est supposé parfait et idéal mais fonctionnant ici en régime non-linéaire. Le montage est alimenté par une tension $e(t)$ d'amplitude variable. La tension de sortie de l'amplificateur vaut $s = \pm V_{sat}$.

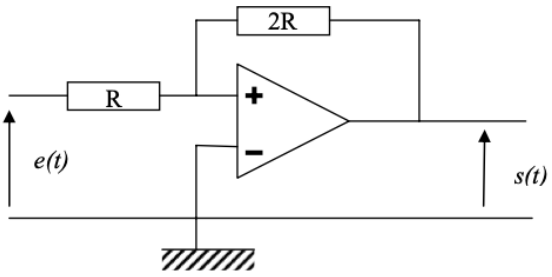
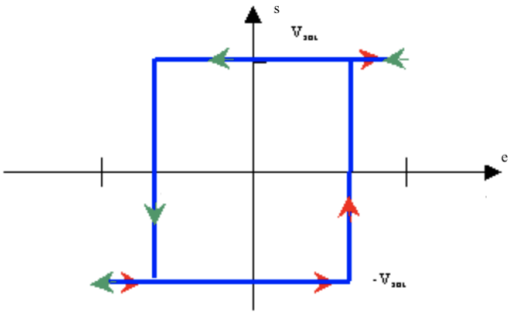


Figure 1 : montage trigger de Schmidt

1 Tracer avec le plus grand soin l'allure de la caractéristique $s(e)$ du montage en justifiant tous les points particuliers utiles. On précisera bien le sens de parcours de la caractéristique en y plaçant des flèches.

C'est l'un des deux cas de cycle d'hysteresis : le cas non inverseur. Comme les deux résistances sont R et $2R$, les seuils de bascules sont $+\frac{V_{sat}}{2}$ et $-\frac{V_{sat}}{2}$. Les sens de parcours sont précisés sur le tracé.



Quel montage aurait été réalisé en inversant les bornes $\oplus$ et $\ominus$ de l'ALI ?

Si l'on inverse les deux bornes, le montage redevient stable et on a alors une fonction de transfert $H = \frac{s}{e} = 2$

2 Un tel montage peut servir à stocker de l'information : par exemple, lorsque la sortie est "bloquée" à la valeur $+V_{sat}$, on dit que l'on a enregistré un bit informatique de valeur "1" et lorsque la sortie est "bloquée" à la valeur $-V_{sat}$, on dit que l'on a enregistré un bit de valeur "0". On souhaite enregistrer un code formé de 4 chiffres (allant de 0 à 9). On rappelle que tout entier peut se décomposer en binaire selon la relation $N = \sum_{k=0}^{p} b_k 2^k$ où $b_k = 0$ ou 1 . L'ensemble des b_k forme le code binaire de l'entier N. Quel est le plus grand nombre que l'on puisse écrire avec un code binaire de 13 chiffres ?

On a alors $N_{max} = \sum_{k=0}^{12} 2^k = \frac{2^{13}-1}{2-1} = 2^{13} - 1 = 8191$

En déduire le nombre de circuits "trigger de Schmitt" à utiliser pour stocker un code formé de 4 chiffres en base décimale.

Pour un nombre à 4 chiffres, cela revient à se demander combien de bits il faut pour coder ce nombre jusqu'à 9999 : comme 13 bits ne suffisent pas, il en faut 14

3 Citez une autre application du trigger de Schmitt que vous avez étudiée pendant l'année.

Oscillateur à relaxation par exemple.

4 Hysteresis en électromagnétisme : ferromagnétisme

On considère tout d'abord le montage expérimental de la figure 5. Il s'agit d'un transformateur dont le noyau ferromagnétique est un tore très mince de rayon moyen R_m. Le bobinage primaire (formé de N_1 spires) est parcouru par le courant $i_1(t)$. Le bobinage secondaire est relié à un montage intégrateur. On visualise à l'oscilloscope la tension u_1 aux bornes de r et la tension u_s en sortie de l'intégrateur, telle que $u_s = \frac{1}{\tau}\int u_2(t)dt$ où τ est une constante positive.

On précise que l'intensité du courant i_2 est nulle.

On supposera que les grandeurs magnétiques (champ magnétique B, excitation magnétique H, aimantation M et moment magnétique) sont invariantes par rotation dans le tore ferromagnétique et y sont uniformes.

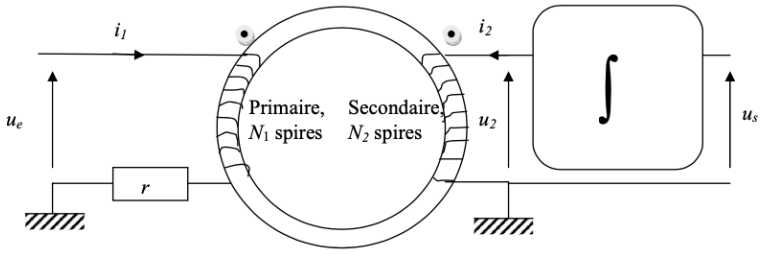


Figure 5 : montage expérimental pour la visualisation de l'hystérésis ferromagnétique
(les points noirs indiquent la convention de signe des enroulements)

Proposer un montage comportant deux amplificateurs opérationnels, trois résistors identiques de résistance R et d'un condensateur de capacité C permettant de réaliser $u_s = \frac{1}{\tau}\int u_2(t)dt$. On précisera l'expression de τ en fonction de R et C.

On intègre avec un coefficient $\tau = RC$ pour le montage à ALI, et on ajoute un montage inverseur de fonction de transfert $H = -1$ pour changer le signe.

5 En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour que l'on précisera, montrer que l'excitation magnétique H est proportionnelle à $N_1 \cdot i_1(t)$. On précisera le facteur multiplicatif. On supposera H uniforme dans tout le tore, de valeur égale à celle en $r = R_m$ (attention à ne pas confondre le r de la résistance et le r du rayon pour le tore).

On a donc $H.2\pi R_m = Ni_1$ avec $i_2 = 0$

6 En appliquant la loi de Faraday au niveau du circuit secondaire (formé de N_2 spires, chacune de section S), montrer que le champ magnétique s'écrit $B = \frac{\tau}{N_2 S} \times f(t)$ où l'on précisera $f(t)$ en fonction de u_s

On a $e_2 = -\dfrac{d\Phi}{dt} = -N_2\, S\dfrac{dB}{dt} = u_2$ donc $B(t) = \dfrac{\tau}{N_2 S}u_s(t)$

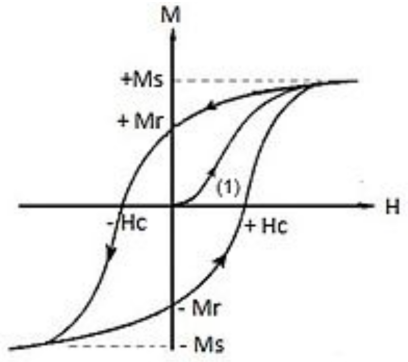
7 On veut tracer l'aimantation M en fonction de l'excitation H. Comment faire en pratique ? Expliquer le protocole expérimental. On pourra supposer que les vecteurs $\vec{H}, \vec{B}$ et $\vec{M}$ sont colinéaires.

On a une tension u_s proportionnelle à B. En prenant la tension aux bornes de r, on a une tension proportionnelle à i_1 donc à H car $u_r = ri_1 = r \cdot 2\pi R_m \cdot H/N_1$. Le seul point délicat ensuite est que l'on ne demande pas B en fonction de H mais M en fonction de H : il faut donc créer un soustracteur à ALI permettant de réaliser $\mu_0 M = B - \mu_0 H$.

Pourquoi est-ce le cas ?

Les dipôles s'orientent dans la direction de $\vec{B}$

8 Tracer l'allure du cycle d'hysteresis de M en fonction de l'excitation H. On précisera sur ce graphique les valeurs de l'excitation coercitive H_c, de l'aimantation rémanente M_r et de H ?



La courbe (1) est la courbe de première aimantation.

9 Soit u_1 la tension aux bornes du primaire (donc n'incluant pas la tension aux bornes de r). Exprimer la puissance P reçue par le bobinage primaire en fonction de u_1 et de i_1. En déduire qu'elle est proportionnelle au produit $H \cdot \frac{dB}{dt}$. Montrer alors que la puissance moyenne dissipée dans le matériau ferromagnétique est proportionnelle à l'aire du cycle d'hystérésis $H(M)$. On pourra admettre que $\int_0^T HdB = \int_0^T \mu_0 HdM$ où T est la période des signaux utilisés.
On a $P(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) = -e_1(t) \cdot 2\pi RmH(t)/N_1$ donc $P(t) = S \cdot 2\pi R_m H(t) \cdot dB(t)/dt = \mathcal{V}H(t) \cdot dB(t)/dt$. On a $P_{moy} =< P(t) >= \mathcal{V}\frac{1}{T}\int_o^T H(t)\frac{dB(t)}{dt}dt = \mathcal{V}\frac{1}{T}\int_{cycle} H.dB$

— TYPE E3A —
Lorsqu'un matériau supraconducteur est soumis à un champ magnétique uniforme, le supraconducteur expulse les lignes de champ magnétique. On parle d'effet Meissner.
On se propose de réaliser une expérience mettant en évidence ce phénomène (figure 2). On pose un aimant permanent sur un matériau supraconducteur. On fait alors baigner le supraconducteur dans du diazote liquide pour abaisser sa température en-dessous de sa température critique. Il devient alors supraconducteur et se met à rejeter les lignes de champ magnétique de l'aimant : le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur devient (quasi) nul et l'aimant se met alors à léviter.

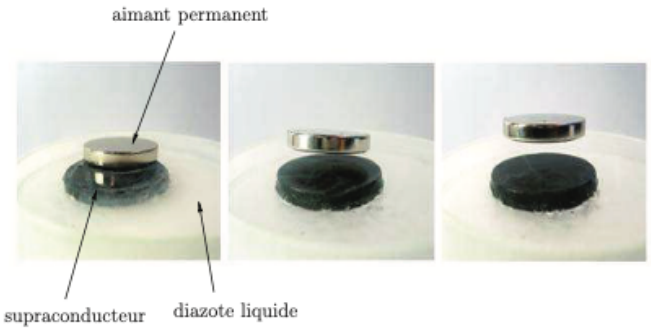
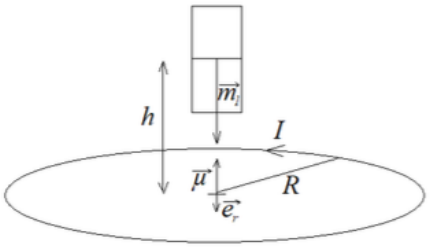


FIG. 2 – Mise en évidence expérimentale de l'effet Meissner réalisée par J. Bobroff (LPS).

D'un point de vue microscopique, le supraconducteur crée des courants électriques qui s'opposent complètement à ce champ magnétique.
10 En l'absence de supraconduction et de basses températures, à quelle condition peut-on observer un phénomène d'induction ?
Un phénomène d'induction peut être observé lorsqu'un circuit électrique est soumis à un flux magnétique variable (loi de Faraday). Cette variation de flux est occasionnée par un champ magnétique variable (induction de Neumann) ou par le mouvement relatif du circuit dans un champ magnétique (induction de Lorentz).
11 Au vu de l'expérience proposée, quelle est la différence fondamentale avec le phénomène d'induction évoqué à la question précédente ?
Dans l'expérience proposée, on a un aimant permanent immobile au-dessus du supraconducteur. Le flux magnétique ressenti par le supraconducteur est stationnaire, ce qui, en théorie classique, ne devrait pas donner lieu à un phénomène d'induction.
! Dans les **deux** questions suivantes, on s'intéresse à un conducteur électrique de conductivité γ soumis un champ électrique $\vec{E}$
12 Rappeler la loi d'Ohm locale.
Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$
Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Que peut-on en déduire sur le champ électrique en son sein ?
C'est le cas $\gamma \to \infty$ et donc $E = 0$
13 A partir d'une des équations de Maxwell, en déduire que le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur parfait est forcément un champ stationnaire.
D'après l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ Dans un conducteur parfait : $\vec{E} = \overrightarrow{0} = \overrightarrow{cst}$ donc $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \overrightarrow{0}$ donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$. On en déduit que le champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du conducteur parfait est indépendant du temps, donc stationnaire.
14 On se propose de modéliser le supraconducteur par une boucle de courant circulaire de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I.



On veut estimer plus loin l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour faire léviter l'aimant d'une hauteur $h \approx 1\ cm$, estimée d'après la figure 2 .
Commencer par donner l'expression du moment magnétique $\vec{\mu}$ de la boucle de courant.
Pour une boucle de courant de surface S parcourue par un courant d'intensité I :

$$\vec{\mu} = I\vec{S} = IS\vec{n} \text{ avec :}$$

avec $\vec{n}$: vecteur normal dirigé suivant la règle de la main droite $S = \pi R^2$ surface de la boucle
15 En présence d'un champ magnétique $\vec{B}$, la boucle de courant va subir une force

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

Quelle est l'expression de l'énergie E_a associée à cette force ?
La force conversative est donc associée à une énergie $E_a = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$
16 L'aimant permanent possède un moment magnétique $\mathcal{M}_1 = 10$ A.m^2. On donne l'expression du champ magnétique créé par un moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ à une distance $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ de son centre :

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[3\left(\overrightarrow{\mathcal{M}} \cdot \overrightarrow{e_r}\right)\overrightarrow{e_r} - \overrightarrow{\mathcal{M}}\right]$$

Quelle est la forme des lignes de champ B ? Le justifier.
Tracé habituel comme dans le cours les LDC d'un dipôle
Exprimer l'ordre de grandeur du champ magnétique B_a créé par l'aimant et ressenti au niveau du supraconducteur.
Le champ magnétique ressenti par le supraconducteur est à la verticale : $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} 2\overrightarrow{m_1}$ L'aimant est à la hauteur h, donc : $B = \frac{\mu_0 m_1}{2\pi h^3}$. Comme on nous donne $h \simeq 1$ cm, on a donc $B \simeq \frac{4\pi 10^{-7} \cdot 10}{2\pi (10^{-2})^3} \simeq 2T$ (ce qui est vraiment un peu grand ! !)
17 ** Estimer par un raisonnement simple (10 lignes maximum) l'ordre de grandeur de l'intensité I nécessaire pour observer la lévitation à une hauteur h de l'aimant de la figure 2 . On prendra une masse m_a de 40 g pour l'aimant permanent.

18 Pour "expulser" le champ magnétique B, ce dernier doit être rigoureusement nul dans le supraconducteur contrairement à un conducteur parfait où on a seulement un champ stationnaire, a priori non nul d'après les analyses précédentes. Pour expliquer cette différence, les frères London (1935) ont postulé que les électrons dans un supraconducteur ne suivent pas les mêmes lois que ceux du conducteur parfait. Ils montrèrent que la densité volumique de courant $\vec{j}$ dans le supraconducteur s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\vec{j}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\vec{B}$$

avec $\vec{B}$ le champ magnétique dans le supraconducteur, λ une constante telle que $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$ où m est la masse de l'électron, n la densité volumique d'électrons supraconducteurs, e la charge de l'électron et μ_0 la perméabilité magnétique du vide.
Montrer que λ est homogène à une longueur.
D'après la formule de London : $\overrightarrow{rot}\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\vec{B}$ Donc : $[j].L^{-1} = \frac{1}{[\mu_0][\lambda]^2}[B]$ De plus, la formule du champ magnétique dans un solénoïde infini : B= $\mu_0 \frac{N}{L} I$ donne la relation : $[B] = [\mu_0].I.L^{-1}$ On a aussi : $[j] = I \cdot L^{-2}$ Donc : $I.L^{-3} = \frac{1}{[\mu_0][\lambda]^2}[\mu_0].I \cdot L^{-1} \rightarrow L^{-2} = [\lambda]^{-2} \rightarrow [\lambda] = L$
19 Déterminer la valeur numérique de λ pour $n = 10^{29}$ m^{-3}.
$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$ donc $\lambda = 16,8$ nm

20 Dans toute la suite de cette partie, on se place en régime permanent.
On note que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}) - \vec{\Delta}$ (appliqué à un vecteur) . Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$ dans le supraconducteur s'écrit alors :

$$\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$$

En régime permanent on a $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$ donc avec les équations de Maxwell,

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{B} - \vec{\Delta}B = -\vec{\Delta}B = \mu_0\overrightarrow{rot}\vec{j} = -\frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$$

21 On s'intéresse à un supraconducteur d'épaisseur $2d$ selon la direction (Ox) et infini selon (Oy) et (Oz). On choisit l'origine du repère orthonormé direct $(Oxyz)$ au milieu de plaque. La plaque supérieure (respectivement inférieure) se situe en $x = d$(respectivement $x = -d$). Cette plaque est plongée dans un champ magnétique qui, en l'absence de plaque, est statique et uniforme tel que $\vec{B}_{\text{ext}} = B_{\text{ext}}\,\overrightarrow{e_z}$. On supposera que le champ magnétique est continu au niveau de chaque interface $x = \pm d$. Le système est représenté ci-dessous (figure 3).

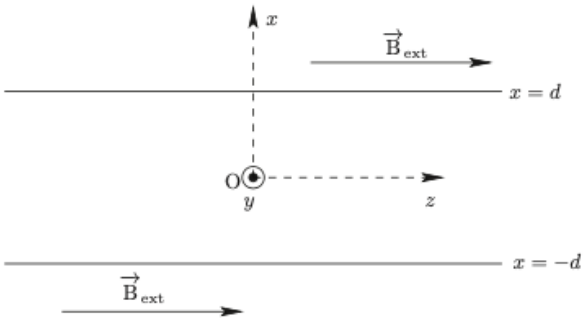


FIG. 3 – Schéma du supraconducteur dans le champ magnétique.

Montrer que le champ magnétique dans le supraconducteur est de la forme $\vec{B} = B(x)\overrightarrow{e_z}$.
La distribution de courant est invariante par translation suivant y et suivant z donc le champ magnétique est indépendant de y et z : $\vec{B}(x,y,z) = \vec{B}(x)$ Le plan orthogonal à z est plan de symétrie pour la distribution de courant donc le champ magnétique est orthogonal à ce plan, c'est à dire dirigé suivant $\vec{e}_z$: $\vec{B} = B(x)\vec{e}_z$

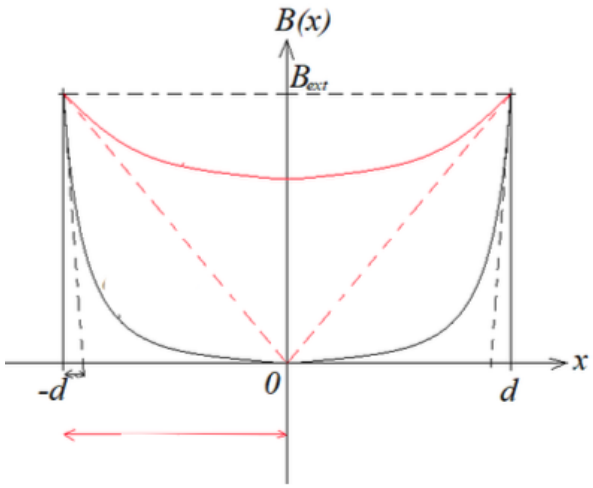
22 Pour une équation différentielle du type $f'' - f = 0$, les solutions générales peuvent se mettre sous la forme $f(\xi) = A\,\text{ch}(\xi) + C\,\text{sh}(\xi)$ où ch et sh sont respectivement les cosinus et sinus hyperbolique rappelés en annexe ci -dessous. Résoudre l'équation différentielle précédente $\vec{\Delta}\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}$ et établir que

$$B(x) = B_{\text{ext}}\,\frac{\text{ch}(\alpha)}{\text{ch}(\beta)}$$

avec α et β des expressions à déterminer en fonction de x, d et λ.
$\frac{d^2B}{dx^2} - \frac{B}{\lambda^2} = 0$ est à résoudre, donc la solution est de type $B(x) = A\,\text{ch}\left(\frac{x}{\lambda}\right) + C\,\text{sh}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ avec des conditions aux limites $B(d) = B(-d) = B_{ext}$ d'où $A = \frac{B_{ext}}{ch(d/\lambda)}$ et $C = 0$ ce qui donne $\alpha = x/\lambda$ et $\beta = d/\lambda$

23 Pour comprendre la signification du terme λ, écrire l'équation différentielle vérifiée par le champ $\vec{E}$ dans un métal bon conducteur et en déduire la similitude dans les paramètres utilisés : expliquer quelle partie de l'équation $\vec{\Delta}\vec{E} = a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + b\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$, et surtout de la solution, fait apparaître une longueur caractéristique δ qui pourra être comparée à λ.
Cette expression rappelle l'expression d'une onde électromagnétique à l'intérieur d'un conducteur ohmique. L'onde s'atténue sur une distance caractéristique appelée épaisseur de peau, c'est l'effet de peau. Dans ce cas λ peut être considérée comme une épaisseur de peau.

24 On donne l'allure de $B(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Préciser sur un tracé que vous reproduirez sur votre copie quelle courbe correspond à quelle valeur de d en le justifiant.
Pour $d = \lambda$, $B(0) = \frac{B_{ext}}{ch1} \simeq 0,65B_{ext}$ et pour $d = 50\lambda$, on a un champ bien plus faible car $B(0) = \frac{B_{ext}}{\text{ch}\,50} \simeq 0$
En déduire à quelle condition sur d le champ magnétique moyen peut être considéré comme nul à l'intérieur du supraconducteur (effet Meissner).



Il faut $d \gg \lambda$ pour considérer que le champ magnétique est nul à l'intérieur du supraconducteur.

25 A partir de $\overrightarrow{rot}\vec{j} = -\dfrac{1}{\mu_0\lambda^2}\vec{B}$, calculer l'expression littérale de la densité de courant volumique $\vec{j} = j(x)\overrightarrow{e_y}$.

$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\vec{B}$ avec $\vec{j} = j(x)\vec{e}_y$ donc : $\frac{dj}{dx}\vec{e}_z = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}B_{ext}\frac{\text{ch}\,\alpha}{\text{ch}\,\beta}\vec{e}_z$

$$\frac{dj}{dx} = -K\,\text{ch}\,\frac{x}{\lambda} \text{ avec } K = \frac{B_{ext}}{\mu_0\lambda^2\,\text{ch}(d/\lambda)}$$

La résolution donne donc : $j(x) = -K\lambda\,\text{sh}\,\frac{x}{\lambda} + K'$ avec $K' = 0$ car il ne peut pas y avoir de courant en l'absence de champ extérieur.

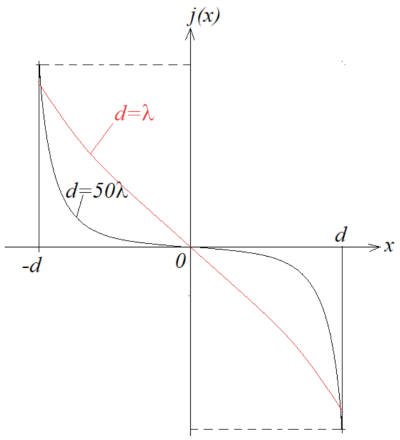
Alors : $j(x) = \dfrac{-B_{ext}}{\mu_0\lambda\,\text{ch}(d/\lambda)}\,\text{sh}(x/\lambda)$

26 Tracer $j(x)$ pour $d = \lambda$ et $d = 50\lambda$. Pour $d = 50\lambda$, comment peut-on qualifier la densité de courant dans le supraconducteur ?

Dans les 2 cas : $j(0) = 0$ Si $d = \lambda$, alors : $j(d) = \dfrac{-B_{\text{ext}}}{\mu_0\lambda}th(d/\lambda) = \dfrac{-B_{\text{ext}}}{\mu_0\lambda}$ th $(1) \simeq \dfrac{-0,8B_{ext}}{\mu_0\lambda}$ et $j(-d) \simeq \dfrac{0,8B_{\text{ext}}}{\mu_0\lambda}$

Si $d = 50\lambda$, alors : $j(d) = \dfrac{-B_{ext}}{\mu_0\lambda}th(50) \simeq \dfrac{-B_{ext}}{\mu_0\lambda}$ et $j(-d) \simeq \dfrac{B_{ext}}{\mu_0\lambda}$

Pour $d = 50\lambda$ la densité de courant est quasi-surfacique.



27 Qu'est-ce qui explique la force qui maintient le supraconducteur en lévitation au dessus de l'aimant ?

Comme les lignes de champs sont à flux quasi nul dans le matériau par rapport à l'extérieur, on peut expliquer avec le cours sur les transducteurs

– – – DONNEES – ––

- Masse d'un électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$C;
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{H}^{-1}$ m^{-1}

- Rotationnel en coordonées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

- Cosinus hyperbolique : $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- Sinus hyperbolique : $2\,\mathrm{sh}(x) = e^x - e^{-x}$

Partie 2. Etude d'un plasmon — Inspiré de CCINP et de Mines

— TYPE CCINP —

Diffusion d'un champ magnétique dans un matériau conducteur semi-infini :
le matériau étudié ici est considéré comme homogène et isotrope. Il possède une conductivité électrique γ et une perméabilité magnétique μ. La relation entre le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ et l'excitation magnétique $\overrightarrow{H}$ dans le matériau est de la forme $\overrightarrow{B} = \mu\overrightarrow{H}$. L'air extérieur est assimilable d'un point de vue magnétique au vide.
Le matériau est soumis à une excitation magnétique extérieure dans l'air de la forme $\overrightarrow{H}_{ext} = H_0\cos(\omega t)\overrightarrow{e}_y$, à laquelle on associe le modèle complexe $\overrightarrow{H}_{ext} = H_0 e^{j\omega t}\overrightarrow{e}_y$. Cette excitation est produite par un système de courants électriques de fréquence f. Dans toute cette partie, on néglige les effets de bord et on associe classiquement à toute grandeur sinusoïdale de la forme $x(t) = X_{max}\cos(\omega t + \varphi)$ la grandeur complexe $\underline{x}(t) = X_{max}e^{j(\omega t+\varphi)}$.
Le matériau occupe le demi-espace correspondant aux $x > 0$ (figure 7).

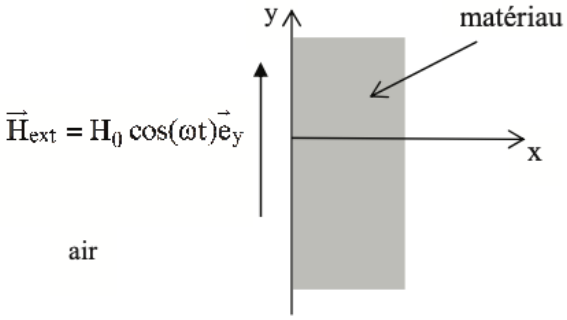


Figure 7 - Matériau conducteur

En s'aidant de la loi d'Ohm locale, écrire, dans l'approximation des régimes quasi- stationnaires, les quatre équations locales satisfaites par les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur du matériau.

quatre équations du cours .... dans l'ARQS donc sans le terme en $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$

En déduire que $\vec{B}(x,t)$ est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$D \times \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{B}(x,t) - \frac{\partial\overrightarrow{B}(x,t)}{\partial t} = \overrightarrow{0}$$

On exprimera D en fonction de γ et de μ.
$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \overrightarrow{grad}(\mathrm{div}(\vec{B})) - \Delta\vec{B}$ donne $\Delta\vec{B} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ donc $D = \frac{1}{\mu\gamma}$

Préciser l'unité de D.
la dimension est L^2T^{-1}
remarquons que cela correspond à une équation de diffusion.

28 En déduire l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants vérifiée par la fonction $\underline{B}(x)$.

En prenant la notation complexe, on a donc $\frac{d^2\underline{B}}{dx^2} = \mu_0\gamma j\omega\underline{B}$

En faisant apparaître l'épaisseur de peau, notée δ, que l'on exprimera en fonction de μ, γ et ω, donner l'expression de la fonction $\underline{B}(x)$ à deux inconnues près.

On en déduit donc l'équation caractéristique $r^2 = 2j\frac{1}{\delta^2}$, soit $r = \pm\sqrt{2}e^{j\pi/4}\frac{1}{\delta}$ ou encore $r = \pm\frac{1+j}{\delta}$.

La solution est donc $\underline{\vec{B}} = \underline{A}_1\exp(-jx/\delta)\exp(-x/\delta) + \underline{A}_2\exp(+jx/\delta)\exp(x/\delta)$

En remarquant qu'il n'y a pas de courant superficiel à l'interface $x = 0^+$, préciser une condition aux limites portant sur le vecteur $\overrightarrow{H}$. En absence de courants surfaciques, on a conservation de H tangentiel.

$$H_y\left(x=0^+\right)=H_0\cos(\omega t)$$

Définir, à l'aide d'un critère que vous préciserez, dans quel cas est validée l'hypothèse d'un matériau semi-infini.
On peut utiliser l'approximation matériau semi-infini, si l'épaisseur e du matériau est suffisamment grande : $e \gg \delta$.

29 En déduire l'expression de la fonction $\underline{\mathrm{B}}(\mathrm{x})$, puis celles des champs $\underline{\mathrm{B}}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ en fonction de μ, H_0 et δ.
On a donc, en $x=0^+$, $\mu H_0=\underline{A}_1$. Soit $\underline{B}(x)=\mu H_0\exp\left(-\mathrm{j}\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)$, $\underline{B}(x,t)=\mu H_0\exp\left(-\mathrm{j}\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp(\mathrm{j}\omega t)\vec{e}_y$ et enfin $\vec{B}(x,t)=\mu H_0\cos\left(\omega t-\frac{x}{\delta}\right)\exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\vec{e}_y$

30 La détermination complète du champ électromagnétique dans le matériau aboutit à l'expression du champ électrique complexe

$$\underline{\mathrm{E}}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sqrt{\frac{\mu\omega}{\gamma}}\mathrm{H}_0\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{x}}{\delta}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega\mathrm{t}-\frac{\mathrm{x}}{\delta}-\frac{3\pi}{4}\right)}\overrightarrow{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}$$

Dans l'hypothèse d'un matériau semi-infini, en déduire, en fonction de H_0, S, μ, γ et ω, l'expression de la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule pour une surface S de matériau.
La puissance volumique moyenne vaut $\gamma E_{eff}^2=\gamma\frac{\mu\omega}{2\gamma}H_0^2\exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)$. On intègre sur le volume du matériau $P_J=\int_0^\infty\frac{\mu\omega}{2}H_0^2\exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)S\,\mathrm{d}x=-\frac{\mu\omega\delta}{2\times2}SH_0^2\left[\exp\left(-2\frac{x}{\delta}\right)\right]_0^\infty=\frac{\mu\omega\delta}{2\times2}SH_0^2$ soit en remplaçant δ : $P_J=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\gamma}}SH_0^2$

— TYPE MINES — Propagation d'une onde sur un plan métallique
On considère un plan conducteur infini ($\Pi = xOz$, voir figure 4) plongé dans le vide. Ce plan est parcouru par des ondes électromagnétiques de célérité c caractérisées par une densité surfacique de courant $\overrightarrow{j_s}$ indépendante de x, et dont la représentation complexe s'écrit

$$\underline{j_s}=j_{s_M}e^{i(Kz-\omega t)}\widehat{e_z}$$

où j_{s_M} et K sont des constantes réelles et positives.

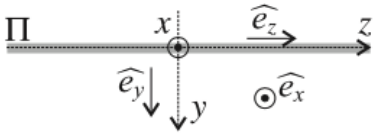


FIGURE 4 – Géométrie du plan

31 En adaptant l'équation de conservation de la charge au cas de distributions surfaciques, déterminer la densité surfacique de charge $\sigma(z,t)$ associée à $\overrightarrow{j_s}$.
On rappelle que $\rho=\frac{\sigma}{\mathrm{e}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{j}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{j}}_\mathrm{s}}{\mathrm{e}}$ donc $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{j}_\mathrm{s}}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial\mathrm{t}}=0$ donc $\frac{\partial\mathrm{j_s}}{\partial\mathrm{z}}+\frac{\partial\sigma}{\partial\mathrm{t}}=0$ donc

$$\underline{\sigma}(z,t)=\frac{K}{\omega}\cdot\underline{j}_\mathrm{s}(z,t)=\frac{K}{\omega}\cdot J_{sM}\cdot\exp i(Kz-\omega t)$$

32 Montrer que le champ électrique $\vec{E}$ créé par la densité de charges σ est de la forme

$$\vec{E}=E_y\widehat{e_y}+E_z\widehat{e_z}$$

où E_y et E_z sont deux fonctions des variables y, z et t
Le plan Oyz est plan de symétrie de la distribution de charges et de courants, donc $\vec{E}$ appartient à ce plan. La distribution est invariante par translation selon Ox, donc $\vec{E}$ ne dépend pas de x.

33 Déterminer la limite de la fonction $E_y(y,z,t)$ lorsque $y\to0^+$
On applique le théorème de Gauss à la surface d'un parallélépipède, d'épaisseur 2ε comprise entre $\mathrm{y}=0^+$et $\mathrm{y}=0^-$et de section $\mathrm{dS}=\mathrm{dx.dz}$ avec $\mathrm{dz}\ll2\pi/\mathrm{K}$.
Le plan 0xy étant plan de symétrie de la distribution, on a $\overrightarrow{\mathrm{E}}(-\mathrm{y},\mathrm{z})=-\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{y},\mathrm{z})$.
On en déduit donc :

$$\mathrm{E_y}\left(0^+,\mathrm{z},\mathrm{t}\right)=\frac{\sigma(\mathrm{z},\mathrm{t})}{2\varepsilon_0}=\frac{\mathrm{K}}{2\varepsilon_0\omega}\cdot\mathrm{j_{sM}}\cdot\exp\mathrm{i}(\mathrm{Kz}-\omega\mathrm{t})$$

34 On suppose que $k = \omega/c < K$. Dans la région $y > 0$, déterminer l'expression de $E_y(y,z,t)$ puis celle de $E_z(y,z,t)$ en fonction des paramètres $K, j_{s_M}, \varepsilon_0, \omega$ et k et des variables y, z et t. Pour cette dernière expression, on pourra calculer div $\vec{E}$.

on part de $\Delta\overrightarrow{\mathrm{E}} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\overrightarrow{\mathrm{E}}}{\partial t^2}$ avec $\underline{E}_y(y,z,t) = f(y)\cdot e^{i(Kz-\omega t)}$ ce qui donne :

$\frac{\partial^2 \mathrm{f(y)}}{\partial \mathrm{y}^2} - \mathrm{K}^2\mathrm{f(y)} = -\frac{\omega^2}{c^2}\mathrm{f(y)}$avec comme condition $\mathrm{K}^2 > \omega^2/\mathrm{c}^2 = \mathrm{k}^2$ et la solution est $f(y) = A\cdot\exp\left(-\sqrt{K^2-k^2}\cdot y\right) + B\cdot\exp\left(+\sqrt{K^2-k^2}\cdot y\right)$ avec nécessairement $B = 0$ puisque la solution ne peut diverger ici.

Par continuité de E en $\mathrm{y} = 0^+$, on a $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{K}}{2\varepsilon_0\omega}\cdot \mathrm{j_{sM}}$

Conclusion : on a donc $\underline{E}_{\mathrm{y}}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t}) = \dfrac{\mathrm{K}}{2\varepsilon_0\omega}\cdot \mathrm{j_{sM}}\cdot\exp i(\mathrm{Kz}-\omega\mathrm{t})\cdot\exp\left(-\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{k}^2}\cdot \mathrm{y}\right)$

De plus l'autre composante vérifie $\underline{E}_{\mathrm{z}}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t}) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{k}^2}}{\mathrm{iK}}\underline{\mathrm{E}}_{\mathrm{y}}(\mathrm{y},\mathrm{z},\mathrm{t})$

35 Quelles sont les propriétés de l'onde qui existe dans la région $y > 0$?

C'est une onde progressive amortie. Avec la proportionnalité en j, E_Z et E_y sont déphasées de $\dfrac{\pi}{2}$

36 On se place dans le cas où le plan est un métal infiniment fin contenant des charges libres sous la forme d'électrons (charge $e < 0$ et masse m). Le nombre de ces électrons par unité de surface est noté ρ, il est supposé constant. On fait l'hypothèse que ces électrons peuvent se déplacer sans interaction (frottement) avec le réseau cristallin constituant le métal. On suppose enfin que ces électrons restent dans le plan $y = 0$ et que le module de leur vitesse $v = \|\vec{v}\|$ est toujours négligeable devant la célérité de la lumière c.

En écrivant la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse électron dans le métal.

Les électrons sont non-relativistes, on néglige la force magnétique devant la force électrique (et le poids aussi), qui est donc la seule force présente. En $y = 0$, on a $\mathrm{E_y} = 0$ par symétrie, et $\mathrm{E_z}(0,\mathrm{z},\mathrm{t}) = \mathrm{E_z}\,(0^+,\mathrm{z},\mathrm{t})$ par continuité de la composante tangentielle du champ électrique. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à un électron s'écrit donc : $\mathrm{m}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{e}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(0,\mathrm{z},\mathrm{t})$ donc

$$\overrightarrow{\mathrm{v}} = \frac{\mathrm{e}}{-\mathrm{im}\omega}\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

37 En déduire la relation de dispersion reliant ω et K pour des ondes libres se propageant dans le plan métallique. De telles ondes sont appelées plasmons de surface. On introduira la pulsation

$$\Omega_S = \frac{\rho e^2}{\varepsilon_0 mc}$$

$\vec{\mathrm{j}}_{\mathrm{s}} = \rho\mathrm{e}\overrightarrow{\mathrm{v}} = \dfrac{\rho\mathrm{e}^2}{-\mathrm{im}\omega}\overrightarrow{\mathrm{E}}(0,\mathrm{z},\mathrm{t}) = \dfrac{\rho\mathrm{e}^2}{\mathrm{m}\omega}\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{k}^2}\dfrac{1}{2\varepsilon_0\omega}\cdot \mathrm{j_{sM}}\cdot\exp \mathrm{i}(\mathrm{Kz}-\omega\mathrm{t})\overrightarrow{\mathrm{u}}_{\mathrm{z}}$

$$\frac{\rho\mathrm{e}^2}{\mathrm{m}\omega}\sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{k}^2}\frac{1}{2\varepsilon_0\omega} = 1 \text{ et donc } \sqrt{\mathrm{K}^2-\mathrm{k}^2} = \frac{2\omega^2}{\Omega_{\mathrm{s}}\mathrm{c}} \text{ avec } \mathrm{k} = \omega/\mathrm{c}$$

$$\mathrm{K} = \frac{\omega}{\mathrm{c}}\sqrt{1+\frac{4\omega^2}{\Omega_{\mathrm{s}}^2}}$$

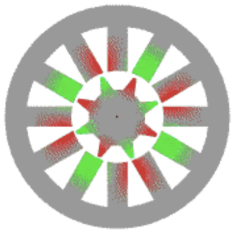
38 Pourquoi une onde électromagnétique plane progressive incidente, dans le vide, ne peut-elle pas exciter un plasmon de surface sur le métal ?

Dans le vide on aurait $K = \omega/c$ ce qui n'est pas le cas ici

Partie 3. Etude d'un moteur synchrone — Inspiré de Mines

Dans cette partie nous allons étudier les caractéristiques techniques d'un moteur synchrone. Il s'agit d'un moteur associé à un onduleur de tension. Cette structure permet de concevoir un dispositif robuste de forte puissance, délivrant un fort couple et présentant une bonne durée de vie. Afin de simplifier l'étude, les pertes mécaniques ainsi que les pertes fer de ce moteur synchrone seront négligées. Finalement, le moteur sera assimilé à une machine synchrone diphasée dont les deux enroulements statoriques sont identiques.

L'inducteur du moteur synchrone est à aimants permanents et possède 8 pôles, soit 4 paires de pôles. Chaque bobinage du stator possède une résistance de $0,03\Omega$. L'intensité nominale du courant dans un enroulement du stator est $I_{\mathrm{N}} = 155$ A. Pendant une durée limitée, elle peut atteindre la valeur maximale $I_{\mathrm{M}} = 185$ A. La machine est étudiée en convention récepteur. Ci-dessous, on a une représentation du stator et du rotor :



39 Expliquer en quelques lignes pourquoi une machine synchrone a besoin d'un champ magnétique $\vec{B}$ tournant et quelle est la nature du rotor habituellement par rapport à ici. Comment réalise-t-on ce champ tournant ?
Une machine synchrone est souvent modélisée par un dipôle magnétique qui suit un champ tournant du fait du couple $\vec{C} = \vec{m} \wedge \vec{B}$. Le champ tournant est réalisé par deux ou trois (ou plus) bobines fixes décalées angulairement et parcourues par des courants déphasés par l'angle de décalage

— TYPE MINES —
Le modèle équivalent à une phase de l'induit est représenté sur la figure 3 . Les tensions et courants sont supposés sinusoïdaux de pulsation $\omega = 2\pi f$. Afin de déterminer les paramètres du modèle, divers essais ont été effectués :
- Essai $n°1$: sur un banc d'essais, on a entraîné la machine synchrone à vide par l'intermédiaire d'un moteur auxiliaire à la vitesse $n = 1500\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$. Aux bornes d'une phase, on a mesuré une tension simple de 57 V.
- Essai $n°2$: avec une alimentation électrique appropriée, on a effectué un essai de la machine en moteur à $1500\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ pour lequel $\psi = 0, I = I_M = 185$ A, et $V = 72$ V.

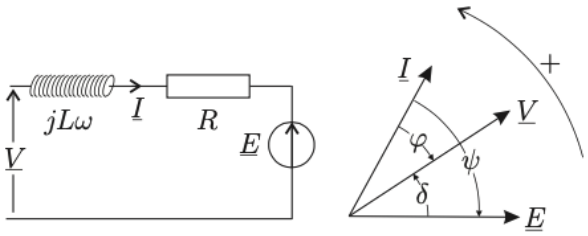
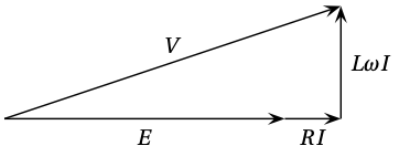


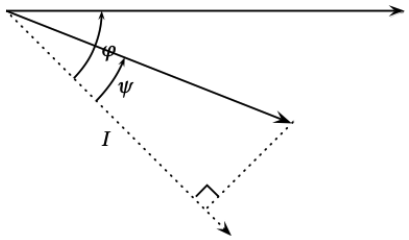
FIG. 3 – Schéma électrique et diagramme vectoriel d'une phase du moteur.

40 On admet qu'en régime permanent de vitesse, la condition de synchronisme pour un moteur possédant p paires de pôles s'écrit $\omega = p\Omega$, où Ω désigne la vitesse de rotation du rotor en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Déterminer la fréquence des tensions statoriques quand $n = 1500\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$.
On a $f = 4 \times 1500/60 = 100$ Hz
41 Représenter le diagramme vectoriel (Fresnel) relatif à l'essai n°2 avec les "vecteurs" E, RI, V et U_L (aux bornes de L). La résistance R n'étant pas négligée, en déduire la valeur de L puisque vous aurez montré que la construction représente un triangle rectangle.

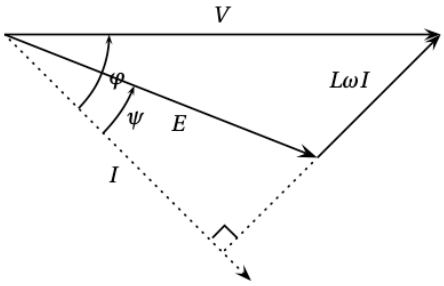


Pour ce triangle rectangle, on a $E + RI = 62,5$ V; $L\omega I = \sqrt{V^2 - (E + RI)^2} = 35$ V, soit $L = 0,3$mH.
42 Quel est l'intérêt d'augmenter le nombre de pôles puisque cela diminue la vitesse angulaire de rotation ?
La puissance étant identique, quand la vitesse diminue le couple (force en rotation) disponible augmente
43 La valeur efficace de la force contre-électromotrice E a pour expression $E = \Phi_0\omega$. Quelle est l'unité de la constante Φ_0 ? Que représente-t-elle ? De quels paramètres de la machine dépend-elle ? Montrer que $E = A\Omega$, où A est une constante dont on précisera l'expression et la valeur numérique.
Φ_0 s'exprime en Wb car c'est un flux de B, et c'est la valeur efficace du flux du rotor dans un bobinage du stator. Elle dépend du bobinage du stator (section, nombre de spires), du champ B créé par le rotor donc celui de l'aimant permanent. $E = \Phi_0\omega = \Phi_0 p\Omega$ soit $A = p\Phi_0$.
Pour la valeur numérique, dans l'essai 1 à vide, on a donc $E = V$ donc $A = 0,36$ Wb

44 Compléter le diagramme vectoriel représentatif d'un point de fonctionnement quelconque dans le cas où l'on a $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. En déduire une relation entre V, E, φ et ψ.



On a les constructions suivantes, qui correspondent à la loi des mailles :



On voit donc que les projections sur l'axe des I donne donc $V\cos\varphi = E\cos\psi$

45 Déterminer l'expression de la puissance électrique absorbée par le moteur P_a en fonction de V, I et φ puis en fonction de E, I et ψ. Quelle relation existe-t-il entre cette puissance électrique P_a et la puissance mécanique électromagnétique P_m reçue par le rotor ?

$P = VI\cos\varphi = EI\cos\psi$. Il y a deux bobinages (l'énoncé dit "assimilé à une machine synchrone diphasée") et donc $P_m = 2P$.

46 Exprimer le couple électromagnétique C développé par le moteur en fonction de A, I et ψ. Pour une intensité efficace I donnée, que doit-on faire pour maximiser le couple développé par la machine ? De quelle unique variable le couple dépend-il alors ? A quel autre moteur ce fonctionnement fait-il penser ?

$P_m = C\Omega$ soit $C = 2AI\cos\psi$. Pour maximiser le couple, on peut modifier l'angle ψ. Le couple est maxi pour $\psi = 0$ et vaut $C_{max} = 2AI$. Le couple ne dépend que du courant comme dans le cas d'un moteur à courant continu.

47 Etude simplifiée de la logique de commande MLI : le moteur est alimenté par un onduleur à commande MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion). Nous simplifierons l'étude de l'onduleur par le schéma monophasé de la partie gauche de la figure 4.

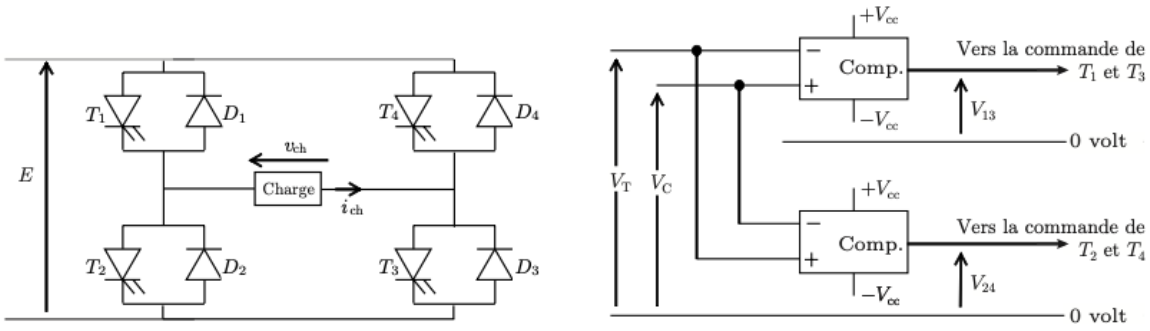
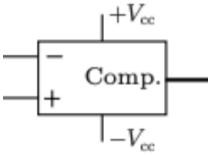


FIG. 4 – Schéma de l'onduleur (à gauche) et de son circuit de commande (à droite)

Les deux comparateurs à base d'ALI supposés idéaux sont alimentés entre $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$. La tension de sortie de ces deux comparateurs commute entre $+V_{cc}$ et $-V_{cc}$. Lorsque la tension de sortie d'un comparateur est au niveau $+V_{cc}$, les interrupteurs associés sont commandés à la fermeture ; quand cette tension est au niveau $-V_{cc}$, les interrupteurs associés sont commandés à l'ouverture. Les tensions V_T et V_C sont définies sur la partie droite de la figure 4 représentant le circuit de commande de l'onduleur. Leurs chronogrammmes sont représentés sur la figure 5.

Représenter un exemple de comparateur à ALI

Cours : les comparateurs simples ont exactement le même schéma que ce qui est cité dans l'énoncé



48 Représenter sur la copie en concordance des temps des signaux V_T, V_C les chronogrammes de V_{13} et V_{24}. Déterminer l'expression de la date t_1 en fonction de T, V_C et $V_{T,m}$.

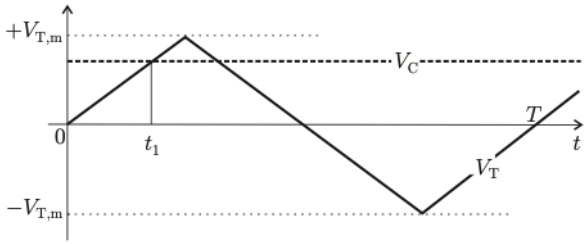
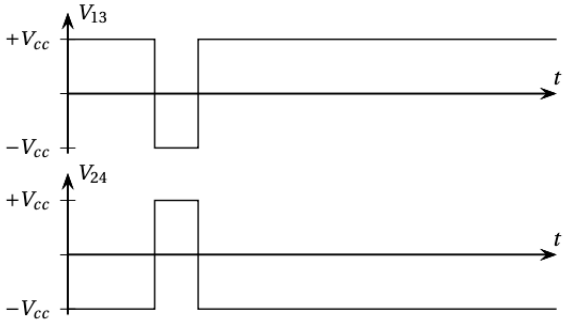


FIG. 5 – Chronogrammmes des tensions V_T et V_C.

Pour le calcul de t_1, on écrit de deux façons la pente positive : $pente = \frac{V_{T,m}}{T/4} = \frac{V_C}{t_1}$ donc $t_1 = \frac{T}{4}\frac{V_C}{V_{T,m}}$



49 En déduire l'allure de la tension $v_{ch}(t)$ aux bornes de la charge. On a alors un tracé de onduleur non symétrique, qui est semblable à un hacheur à plusieurs quadrants. Déterminer l'expression du rapport cyclique α de la tension $v_{ch}(t)$ en fonction de V_C et $V_{T,m}$.
Quand $V_{13} = +V_{cc}$, le chemin passant est { E, inter 1 , charge, inter3, masse }; on a alors $v_{ch} = E$. Quand $V_{13} = -V_{cc}$, le chemin passant est {E, inter 4, charge à l'envers, inter2, masse } on a alors $v_{ch} = -E$. La durée de l'état bas, $v_{ch} = -E$, est le double de l'intervalle de temps entre t_1 et $T/4$ soit $\frac{T}{4} - \frac{T}{4}\frac{V_C}{V_{T,m}} = \frac{T}{2}\left(1 - \frac{V_C}{V_{T,m}}\right)$, soit un rapport cyclique de $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{V_C}{V_{T,m}}\right)$ qui varie bien de 0 à 1.
Quel inconvénient présente ce type de commande ?
Nous avons v_{ch} qui évolue entre deux valeurs $\pm E$ mais les intervalles de temps sont différents donc le signal aux bornes de la charge n'est pas un créneau à moyenne nulle. On a donc pas le fonctionnement classique vu dans le cours du onduleur.

50 Détaillez les commandes pour avoir une tension v_{ch} créneau symétrique de moyenne nulle.
voir cours : on aura $\alpha = \frac{1}{2}$ pour $V_C = 0$

51 La commande réelle permet d'alimenter le moteur avec une tension dont la forme est représentée ci-dessous sur la figure 6 . Les angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ compris dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et représentés sur la figure 6 sont fixés, les suivants, situés dans les intervalles $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ s'en déduisent par symétrie.

Montrer que la valeur efficace vérifie : $V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t$ et en déduire l'expression littérale de la valeur efficace $V_{\text{ch}}^{\text{eff}}$ de la tension $v_{\text{ch}}(t)$ en fonction des angles $\alpha_{i=1,\ldots,6}$ et de la tension E.
Valeur efficace : physiquement, c'est la valeur de la tension continue qui provoquerait une même dissipation d'énergie que la tension variable u(t) si elle était appliquée aux bornes d'une résistance.
On part de $V_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\mathrm{d}t = 4 \times \frac{1}{T}\int_0^{T/4} v^2(t)\mathrm{d}t$ pour notre tension $v_{\text{ch}}(t)$ étant donné le tracé, ce qui donne donc en remarquant que l'on a un tracé en θ et pas en t :

$$V_{\text{ch}}^{\text{eff}\ 2} = 4 \times \frac{1}{2\pi}\left[E^2(\alpha_2 - \alpha_1) + E^2(\alpha_4 - \alpha_3) + E^2(\alpha_6 - \alpha_5)\right]$$

$$V_{ch}^{eff} = E\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{[(\alpha_2-\alpha_1)+(\alpha_4-\alpha_3)+(\alpha_6-\alpha_5)]}$$

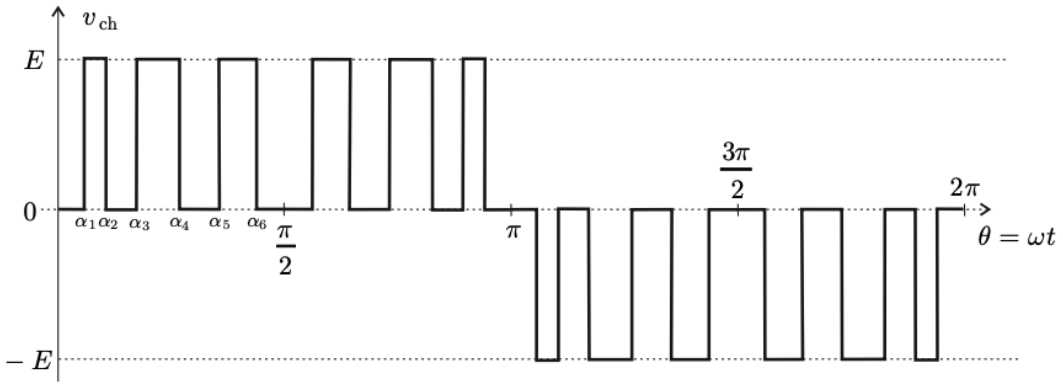


FIG. 6 – Commande réelle d'alimentation

Partie 4. Chimie — Inspiré de CCINP

Pour étudier en détails les composés ferriques, il faut se concentrer sur la structure électronique de l'élément fer.

52 Donner la configuration électronique de l'atome de fer dans son état fondamental.

On part de $Z = 26$, donc le remplissage donne $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^6(4s)^2$

53 En déduire, en le justifiant, les ions les plus courants de cet élément.

• Ion Fe^{2+} : perte de 2 électrons sur la couche $4s$ la plus éloignée

Configuration électronique : $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^5(4s)^1$

Cette configuration est préférable à $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^6$ car une couche d à demi-remplie possède un maximum d'électrons à spin parallèles, elle est plus stable.

• Ion Fe^{3+} : perte de 3 électrons sur les couches $3d$ et $4s$.

Configuration électronique : $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(3d)^5$

Cette configuration électronique est très stable car tous les électrons sur la couche $3d$ sont à spin parallèles.

54 A pression ambiante, le fer peut cristalliser sous différentes formes :

— pour des températures inférieures à 912°C : le fer, appelé fer- α, cristallise dans un système cubique centré (CC). La structure cristallographique est donnée en figure 11;

— pour des températures entre 912°C et 1538°C : le fer, appelé fer- γ, cristallise dans un système cubique faces centrées (CFC).

Représenter la maille élémentaire de type CFC.

classique du cours : atomes aux sommets et aux centres des faces

55 Pour les deux structures, quel est le nombre d'atomes de fer par maille ?

Pour Fe $\alpha(c.c)$: $1 + 8 \times \frac{1}{8} = 2$ atomes de Fe par maille

Pour Fe $\gamma(c.f.c)$: $6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} = 4$ atomes de Fe par maille

56 Dans chaque structure, comment s'effectue le contact entre les atomes dans le cas de la compacité maximale ? En déduire la relation entre le paramètre de maille a et le rayon atomique r dans chacune des structures dans cette situation particulière.

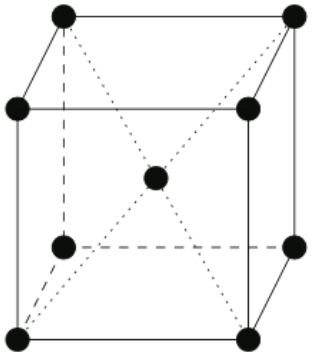


FIG. 11 – Structure cubique centré (CC).

Pour le réseau c.c : contact entre 3 atomes sur la diagonale du cube.
On en déduit : $\sqrt{3}a = 4r$
Pour le réseau c.f.c : contact entre 3 atomes sur la diagonale d'une face.
On en déduit : $\sqrt{2}a = 4r$

57 En déduire les masses volumiques théoriques du fer- α et du fer- γ.
La masse volumique est donnée par :

$$\rho = \frac{N^{\text{bre}} \text{ atomes de Fe} \times m(\text{Fe})}{a^3} = \frac{N^{\text{bre}} \text{ atomes de Fe} \times \text{M(Fe)}}{N_A a^3}$$

- Pour Fe $\alpha(c.c)$, on a N^{bre} atomes $= 2$ et $a = \frac{4r}{\sqrt{3}}$ donc $\rho_\alpha = 7922 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Pour Fe $\beta(c.f.c)$, on a N^{bre} atomes $= 4$ et $a = \frac{4r}{\sqrt{2}}$ donc $\rho_\alpha = 8625 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

58 On donne la structure d'un supraconducteur haute température contenant du fer, du baryum et de l'arsenic, de formule chimique $\text{Ba}_x\text{Fe}_y\text{As}_z$ (figure 12). On représente aussi une coupe selon la diagonale (ABCD) de la maille rectangulaire pour plus de clarté.

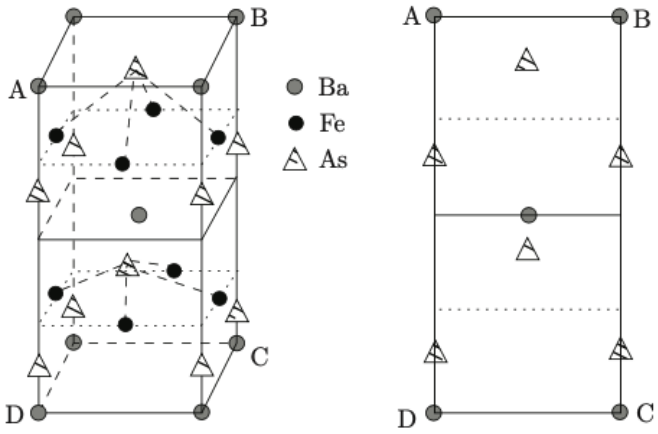


FIG. 12 – Représentation d'une maille de la structure cristallographique de $\text{Ba}_x\text{Fe}_y\text{As}_z$ et une coupe selon (ABCD).

Calculer le nombre d'atomes de baryum (Ba), de fer (Fe) et d'arsenic (As) dans une maille du supraconducteur représenté figure 12 .
N^{bre} de $Ba : 1 + 8 \times 1/8 = 2$
N^{bre} de $Fe : 8 \times 1/2 = 4$
N^{bre} de As : $2 + 8 \times 1/4 = 4$

59 En déduire la formule de l'alliage du supraconducteur pour laquelle x est le plus petit entier possible.
Pour $x = 1$, on a donc BaFe_2As_2

60 Stabilité du fer en solution aqueuse : les espèces prises en compte sont : $\text{Fe}_{(s)}, \text{Fe}^{2+}_{(aq)}, \text{Fe}^{3+}_{(aq)}, \text{Fe(OH)}_{3(\ s)}$ et $\text{Fe(OH)}_{2(\ s)}$. On supposera que la concentration totale en espèce dissoute est $c_d = 10^{-2}$ mol.L^{-1}. L'allure du diagramme E-pH du fer est donnée figure 13. On superpose en pointillé le diagramme E-pH de l'eau. On supposera les pressions égales à la pression standard, soit $P(\text{H}_2) = P(\text{O}_2) = P^\circ = 1$ bar.
Écrire les deux demi-réactions d'oxydoréduction dans lesquelles interviennent les couples de l'eau.
En déduire les deux équations des deux droites en pointillés sur la figure 13 de l'énoncé.
Couples de l'eau :
- Couple H_2O/H_2 (ou en fait H^+/H_2) : $2H^+ + 2e^- = H_2$

Donc : $E_1 = E_1^0 + \frac{0,06}{2} \log \frac{[H^+]^2}{p(H_2)}$ or $E_1^0 = 0$ et $p(H_2) = P^0 = 1$ bar par convention
D'où : $E_1 = 0,06 \log[H^+] = -0,06pH$

- Couple O_2/H_2O : $O_2 + 4H^+ + 4e^- = 2H_2O$

Donc : $E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{4} \log[H^+]^4 p(O_2)$ or $E_2^0 = 1,23$ V et $p(O_2) = P^0 = 1$ bar
D'où : $E_2 = 1,23 - 0,06pH$

61 Sur votre copie, placer sur un diagramme comme celui de la figure 13 les différentes espèces du fer (numérotées de I à V à remplacer), l'eau, le dioxygène et le dihydrogène. Où sont les zones d'immunité, de corrosion et de passivation ?

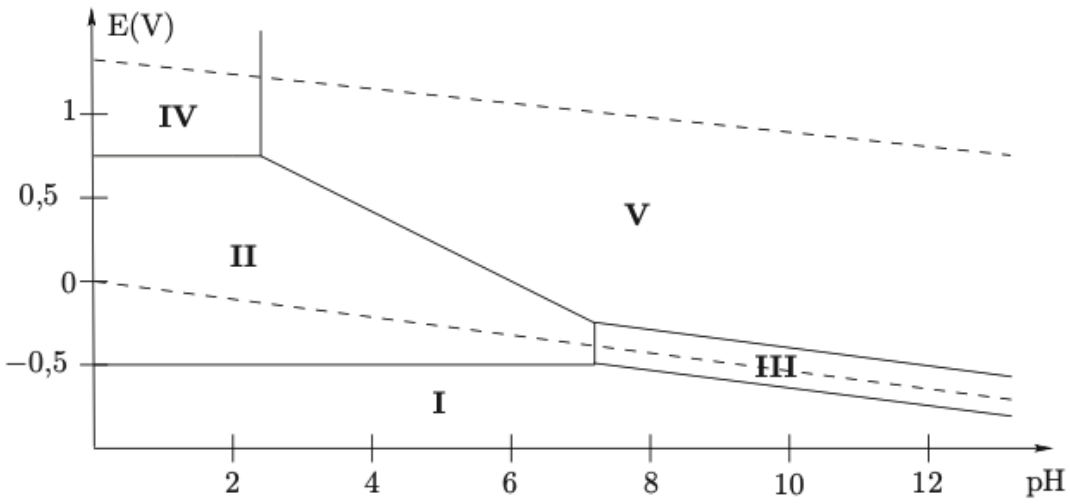
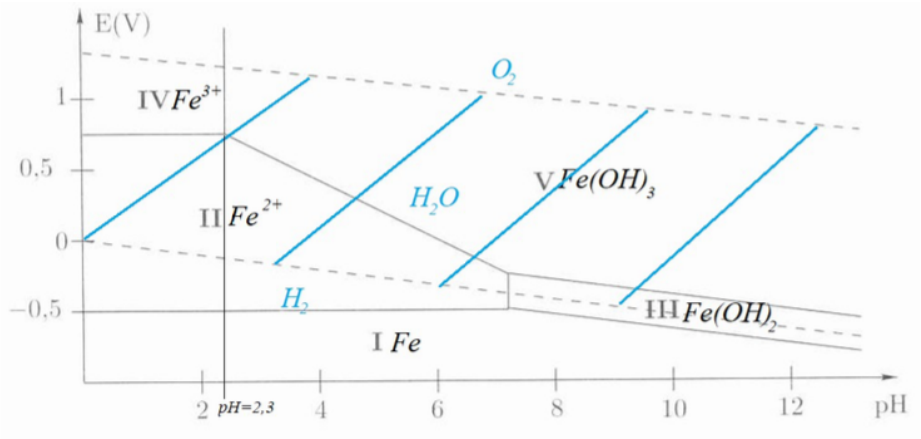


FIG. 13 – Diagramme E-pH du fer.

On obtient : la zone d'immunité est celle de Fe, les zones de corrosion sont celles des ions $Fe^{2+}_{(aq)}, Fe^{3+}_{(aq)}$ et celles de passivation sont celles des précipités.



En déduire un moyen électrique de protéger le fer contre la corrosion.
... en imposant un potentiel situé dans la zone de Fe, par exemple inférieur à $-0,5\ V$ pour $pH = 4$
Pourquoi les zones III et V ne sont pas envisageable pour protéger l'élément Fer ?
L'oxyde formé n'est pas étanche et la corrosion peut se poursuivre
Pourquoi certains diagramme citent les espèces Fe_2O_3 et Fe_3O_4 ?
Il s'agit des oxydes déposés en couche et ayant expulsé du H_2O (donc déshydratation)

62 Déterminer la pente de la frontière entre les domaines II et V.
Pente de la frontière domaine II et V : Fe^{2+} et $Fe(OH)_3$
Demi-équation : $Fe(OH)_3 + e^- + 3H^+ = Fe^{2+} + 3H_2O$
Donc : $E\left(Fe(OH)_3/Fe^{2+}\right) = E^0\left(Fe(OH)_3/Fe^{2+}\right) + 0,06 \log \frac{[H^+]^3 a(Fe(OH)_3)}{[Fe^{2+}](C^0)^2}$
Ce qui donne : $E\left(Fe(OH)_3/Fe^{2+}\right) = cste - 0,18 pH$
Soit une pente de $-0,18$ V/ unité de pH

63 Établir l'expression et la valeur numérique du pH de la frontière entre les domaines IV et V et vérifier cette valeur avec la figure 13.
On cherche le pH frontière entre les domaines IV et V : Fe^{3+} et $Fe(OH)_3$
On a : $Fe(OH)_3 = Fe^{3+} + 3HO^-$ donc $K_s = [Fe^{3+}][HO^-]^3 = [Fe^{3+}]\frac{K_e^3}{[H^+]^3}$
Donc : $pK_s = -\log[Fe^{3+}] + 3pK_e - 3pH$
A la frontière : $[Fe^{3+}] = C_0 = 10^{-2}$ mol. L^{-1}
Donc : $pH = \frac{1}{3}(-\log C_0 + 3pK_e - pK_s)$
A.N : $pH = 2,3$

64 Comme pour le fer, le cuivre qui constitue certains câbles classiques, par exemple sous-marins, peut s'oxyder par le dioxygène dissous dans l'eau. On doit donc le protéger. Pour y arriver, on utilise des anodes sacrificielles de fer. Justifier l'utilisation du fer pour protéger le cuivre.
Sur l'échelle des potentiels standard, on peut voir que la réaction la plus thermodynamiquement favorisée est l'oxydation du fer par le dioxygène. Le fer est plus réducteur que le cuivre est peut donc (sauf aspects cinétiques contraires) constituer une anode sacrificielle.
65 Lorsqu'on protège du cuivre par une anode en fer (méthode de l'anode sacrificielle), un courant de protection s'établit au niveau de la surface S du câble en cuivre. Sa densité surfacique de courant moyenne vaut $j = 0,05\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}$. Expliquer à l'aide d'un diagramme intensité-potentiel pourquoi cette réaction a lieu, pourquoi les parties anodiques des courbes n'ont pas de palier de diffusion, pourquoi il n'y a pas de dégagement de H_2 même si le milieu est acide.
parties anodiques : la courbe de Cu correspond à la réaction $Cu \to Cu^{2+}$ donc il n'y a pas de souci de migration du réducteur
pas de dégagement de H_2 : parce que la courbe de H^+/H_2 est située entre la courbe du cuivre et celle du fer
A-t-on des surtensions sur ce tracé ?
sans doute puisque les métaux ne sont pas du platine
Peut-on voir une vague de corrosion anodique ?
oui, au niveau de l'oxydation du cuivre
66 Proposer deux autres méthodes de protection contre la corrosion en détaillant brièvement.
Méthode physique : Cuivre recouvert d'une couche de peinture ou d'une gaine protectrice pour éviter le contact entre cuivre et dioxygène.
Méthode chimique : Passivation du cuivre. Dans un certain domaine de pH, la corrosion du cuivre crée une couche d'oxyde de cuivre protectrice.
67 Estimer la masse de fer nécessaire pour protéger un câble de cuivre de rayon $r = 1$ cm et de longueur $L = 1$ km pendant une durée de 10 ans.
Intensité qui parcourt le câble : $I = j \times S$ avec $S = 2\pi rL$
Soit Q la charge échangée par oxydo-réduction pendant 10 ans : $Q = I \times \Delta t$
La réaction d'oxydation à l'anode (fer) est : $Fe = Fe^{2+} + 2e^-$
Donc chaque atome de fer donne 2 électrons, c'est à dire une charge 2e
Alors n mol de fer (nN_A atomes de fer) donne une charge $Q = 2nN_Ae = 2nF$
Pour protéger le câble de cuivre, il faut : $Q = I \times \Delta t = 2nN_Ae$
Donc : $n = \dfrac{2j\pi rL\Delta t}{2N_Ae}$ donc $m = \dfrac{j\pi rL\Delta t}{N_Ae}M(Fe)$
donc $m \simeq \frac{1,5(10\times365\times24\times3600)}{10^5} \times 5,6.10^{-2} \simeq 4,5 \times 5,6 \times 10 \simeq 250$ kg

— DONNÉES CHIMIQUES —

CUIVRE :
— Masse volumique : $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
— Conductivité électrique du cuivre : $\gamma_{\text{Cu}} = 6,0 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}\cdot\Omega^{-1}$
— Température de fusion : $T_{\text{fus}} = 1356$ K
— Capacité thermique massique : $c_{\text{cu}} = 390\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$
Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_a = 6,0 \times 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$;
FER :
— Numéro atomique : $Z = 26$
— Masse molaire : $M_{\text{Fe}} = 56\ \text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$
— Rayon atomique : $r_{\text{Fe}} = 124$ pm
Constante de Faraday : $F = 9,7 \times 10^4\ \text{C}.mol^{-1}$
Produits de solubilité à 298 K :
— $K_s\left(\text{Fe(OH)}_{2(\text{ s})}\right) = 7,9 \times 10^{-15}$
— $K_s\left(\text{Fe(OH)}_{3(\text{ s})}\right) = 6,3 \times 10^{-38}$
Potentiels rédox standards à 298 K :
— $E^\circ\left(\text{H}^+/\text{H}_2\right) = 0,00$ V
— $E^\circ\left(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}\right) = 1,23$ V
— $E^\circ\left(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}\right) = -0,44$ V
— $E^\circ\left(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}\right) = 0,77$ V
— $E^\circ\left(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}\right) = +0,34$ V
et à 25°C, $\frac{RT}{F}\ln(x) \approx 0,06\log(x)$