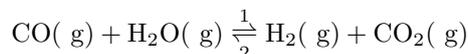


Durée : 4h

## Sujet de Chimie

1. **Thermochimie** — Inspiré de CCINP

Lorsqu'on envoie dans un four à la température de  $900^\circ\text{C}$ , un courant gazeux, supposé parfait, constitué par un mélange de  $\text{CO}$ ,  $\text{CO}_2$  et  $\text{H}_2$  sous la pression d'une atmosphère, il s'établit l'équilibre suivant :



1 Pourquoi l'une des cases du tableau ci-dessous est nulle ?  
c'est parce que  $\text{H}_2(g)$  est un corps pur dans l'état standard

2 Donner les variations d'enthalpie ( $\Delta H_{r,298}^\circ$ ) et d'entropie ( $\Delta S_{r,298}^\circ$ ) standards de la réaction.  
On va appliquer les lois de Hess, et ici les calculs sont simples car on a  $\nu_i = \pm 1$  :

$$\Delta H_{r,298}^\circ = \Delta H_{f,298}^\circ(\text{H}_2, g) + \Delta H_{f,298}^\circ(\text{CO}_2, g) - \Delta H_{f,298}^\circ(\text{CO}, g) - \Delta H_{f,298}^\circ(\text{H}_2\text{O}, g)$$

et on a également :

$$\Delta S_{r,298}^\circ = S_{298}^\circ(\text{H}_2, g) + S_{298}^\circ(\text{CO}_2, g) - S_{298}^\circ(\text{CO}, g) - S_{298}^\circ(\text{H}_2\text{O}, g)$$

Cela donne numériquement :

$$\Delta H_{r,298}^\circ = 0 + (-393,1) - (-110,4) - (-241,6) = -41,10 \text{ kJ/mol}$$

et également :

$$\Delta S_{r,298}^\circ = 130,6 + 213,4 - 197,7 - 188,7 = -42,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

3 Calculer la constante d'équilibre  $K$  à  $900^\circ\text{C}$

On est à une température de  $900 + 273 \text{ K}$

A l'équilibre  $\Delta_r G_T = \Delta_r G_T^\circ + RT \ln K = 0$  donc on peut écrire que  $\Delta_r G_T^\circ = -RT \ln K$ . Il reste à calculer cette variation d'enthalpie libre, avec  $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H_T^\circ - T \Delta_r S_T^\circ = -41100 - 1173 \cdot (-42,4) = 8635,2 \text{ J/mol}$ .

On en déduit donc

$$K = 0,412$$

4 Calculer le sens d'évolution de la réaction pour un mélange initial à  $900^\circ\text{C}$  de 20 moles de  $\text{CO}$ , 15 moles de  $\text{CO}_2$  et 25 moles  $\text{H}_2$ .

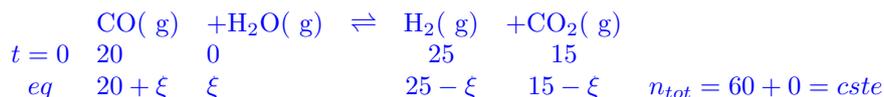
Avec cet état initial, on a un quotient de réaction initial ( $t=0$ ) qui vaut

$$Q = \frac{p(\text{H}_2) p(\text{O}_2) (p^\circ)^2}{p(\text{H}_2\text{O}) p(\text{CO}) (p^\circ)^2} = \infty \text{ car } p(\text{H}_2\text{O}) = 0$$

Comme  $\Delta_r G_T = \Delta_r G_T^\circ + RT \ln Q = -RT \ln K + RT \ln Q = RT \ln \frac{Q}{K} > 0$  ici.

Comme  $dG = \Delta_r G \times d\xi < 0$  dans le cas spontané, alors ici  $d\xi < 0$  donc la réaction va dans le sens indirect (2)

5 Calculer le nombre de moles des différents constituants du mélange à l'équilibre pour ce mélange initial



On a alors

$$K = \frac{P_{\text{H}_2} \cdot P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}} \cdot P_{\text{H}_2\text{O}}} \times \frac{(p_0)^2}{(p_0)^2}$$

On a donc avec les  $P_i = x_i P_{tot}$  :

$$K = \frac{n_{\text{H}_2} \cdot n_{\text{CO}_2}}{n_{\text{CO}} \cdot n_{\text{H}_2\text{O}}} \times \frac{(P_{tot})^2}{(P_{tot})^2} \times \frac{(n_{tot})^2}{(n_{tot})^2}$$

L'exemple choisi se simplifie donc très bien ici (puisque les  $\nu_i$  sont tous égaux à 1 en valeur absolue) en :

$$K = \frac{(25 - \xi)(15 - \xi)}{(20 + \xi)(\xi)} = 0,412$$

qui est donc une équation à une seule inconnue  $\xi$  vérifiant donc

$$K(20\xi + \xi^2) - (25 - \xi)(15 - \xi) = 0 = K(20\xi + \xi^2) - 25 \times 15 - \xi^2 + 40\xi$$

donc finalement à résoudre :

$$\xi^2(K - 1) + \xi(20K + 40) - 375 = 0$$

ce qui donne, par tâtonnements dichotomiques ou avec un petit programme sur la calculatrice :

$$\xi \approx 8,7$$

On en déduit ensuite :

$$\begin{aligned} n(\text{CO}) &= 28,7 \text{ moles} ; n(\text{H}_2) = 16,3 \text{ moles} ; \\ n(\text{CO}_2) &= 6,3 \text{ moles} ; n(\text{H}_2\text{O}) = 8,7 \text{ moles} \end{aligned}$$

**6** Calculer la température d'inversion de l'équilibre pour favoriser la formation de l'eau. La température d'inversion  $T_i$  correspond donc à la frontière entre le sens (1) favorisé et le sens (2) favorisé. Cela correspond donc à la frontière entre les deux cas  $K > 1$  et  $K < 1$ . Il s'agit donc de  $K = 1$ . Dans ce cas, on a alors

$$T_i = \frac{\Delta_r H^\circ}{\Delta_r S^\circ} \approx 969 \text{ K}$$

|   | CO( g ) | H <sub>2</sub> O( g ) | H <sub>2</sub> ( g ) | CO <sub>2</sub> ( g ) |
|---|---------|-----------------------|----------------------|-----------------------|
| $S_{298}^\circ$ (J.mol <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> ) | 197,7   | 188,7                 | 130,6                | 213,4                 |
| $\Delta H_{f,298}^\circ$ (kJ · mol <sup>-1</sup> )      | -110,4  | -241,6                | 0                    | -393,1                |

Donnée :  $R = 8,314 \text{ J/K/mol}$

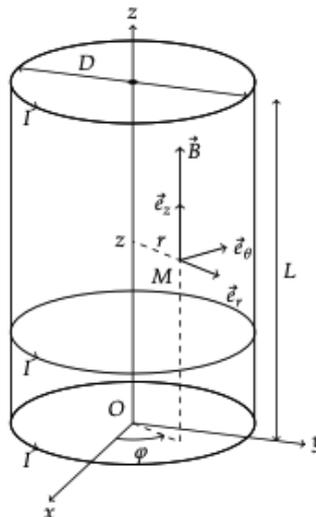
## Sujet de Physique

### 2. **Train Transrapid allemand** — Sujet adapté —

Un train à sustentation magnétique utilise les forces magnétiques pour léviter au dessus de la voie ; il n'est donc pas en contact avec des rails, contrairement aux trains classiques. Ce procédé permet de supprimer la résistance au roulement et d'atteindre des vitesses élevées.

Dans un autre système à sustentation électrodynamique (SCMaglev), un champ magnétique  $B$  est créé par des bobines supraconductrices placées dans le mouvement. Le constructeur indique que pour faire léviter le train le champ magnétique produit doit dépasser la valeur de 4 teslas.

On considère le montage suivant :



|  |  |
|--|--|
| Perméabilité magnétique du vide              | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$        |
| Permittivité diélectrique du vide            | $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ |
| Charge élémentaire                           | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$                              |
| Intensité du champ de pesanteur terrestre    | $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$                            |
| Capacité thermique massique de l'eau liquide | $c_e = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$    |

Caractéristiques du solénoïde

| Diamètre $D$ | Longueur $L$ | Nombre de spires $N$ | Diamètre du fil de cuivre $d$ |
|--------------|--------------|----------------------|-------------------------------|
| 0,2 m        | 0,5 m        | 10000                | 2,0 mm                        |

Données sur le cuivre

Masse volumique  $\mu_{Cu} = 8,96 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ Capacité thermique massique  $c = 385 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ Résistivité électrique  $\rho = 1,68 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} = 1/\gamma$  par définitionTempérature de fusion  $T_f = 1356 \text{ K}$ 

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{Z}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{Z}) - \Delta\vec{Z} \text{ où } \vec{Z} \text{ est un vecteur et } \Delta\vec{Z} \text{ son laplacien.}$$

**7** Expliquer à quelle condition  $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$  est le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde. Comment montrer ce qu'est le champ magnétique extérieur ?

C'est le cas du cours d'un solénoïde infini. Dans ce cas, en utilisant le th. d'Ampère sur un rectangle dont l'un des côtés est sur l'axe et l'autre ailleurs dans le solénoïde, on montre que le champ  $B_{int}$  dans le solénoïde hors de l'axe est égal au champ  $B_{axe}$  sur l'axe. Ensuite, en prenant un rectangle dont l'un des côtés est sur l'axe et l'autre ailleurs à l'extérieur du solénoïde, on montre que le champ  $B_{ext}$  hors du solénoïde est égal au champ  $B_{axe}$  sur l'axe.

**8** Exprimer la résistance  $R$  du fil cylindrique, en fonction de  $\rho$ ,  $\ell$  et  $d$ . La conductivité est l'inverse de la résistivité. C'est la question de cours à bien détailler : un schéma avec un cylindre et les vecteurs  $\vec{E}$ ,  $\vec{j}_e$ ,  $d\vec{\ell}$ , puis on écrit que tous les vecteurs sont colinéaires et que le calcul se simplifie rapidement :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{E\ell}{j_e S} = \frac{E\ell}{\gamma E S} = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S} = \rho \frac{\ell}{S} = \rho \frac{4\ell}{\pi d^2}$$

**9** En ayant également exprimé la longueur  $\ell$  du fil de cuivre en fonction de  $N$  et  $D$ , en déduire la puissance  $P_J$  dissipée par effet Joule en fonction de  $\rho$ ,  $D$ ,  $L$ ,  $B$ ,  $N$ ,  $\mu_0$  et  $d$ . Application numérique.

La puissance dissipée par effet Joule est donc

$$P_J = RI^2$$

Ensuite on utilise les deux expressions :

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I \quad \text{et} \quad \ell = N\pi D$$

ce qui donne donc

$$P_J = \frac{4\rho ND}{d^2} \left( \frac{LB}{\mu_0 N} \right)^2$$

Application numérique :  $P = 0,85 \text{ MW}$  ce qui est énorme !

**10** Pour estimer le temps écoulé entre le début de l'expérience et la fusion du fil de cuivre, on applique le premier principe au fil de cuivre en supposant la transformation adiabatique, entre l'instant  $t = 0$  et  $t = \tau$  : exprimez  $\tau$  en fonction de  $\ell$ ,  $d$ ,  $c$ ,  $\mu_{Cu}$ ,  $P_J$ ,  $T_f$  et  $T_0$ . Application numérique.

Appliquer le premier principe signifie que l'on va supposer pour une transformation adiabatique que toute l'énergie dissipée par effet Joule va servir à échauffer le cuivre donc

$$P_J \times \Delta t = P_J \times \tau = Q(\text{avec Cu}) + Q(\text{avec ext}) = Q(\text{avec Cu}) + 0 = \Delta U_{cuivre} = m C_{V,mol} \Delta T$$

$$P_J \tau = \mu_{Cu} V c (T_f - T_0) = \mu_{Cu} \pi \frac{d^2}{4} \ell c (T_f - T_0)$$

$$\tau = \mu_{Cu} \pi \frac{d^2}{4 P_J} \ell c (T_f - T_0)$$

Application numérique :  $\tau \approx 0 \text{ min } 17 \text{ s}$ 

**11** Pour expliquer le comportement d'un supraconducteur, comme le conducteur normal, le supraconducteur est supposé, dans un modèle simpliste, être constitué d'un réseau fixe, dont certains atomes sont ionisés, ce qui conduit à un "fluide" d'électrons de conduction de densité volumique  $n$ . Mais contrairement au cas du conducteur, il ne s'ajoute ici aux forces électromagnétiques aucune force de type "frottement fluide", ce fluide étant parfait (au sens non visqueux). On note  $m$  et  $-e$  la masse et la charge des électrons.

De quel modèle avec "frottement fluide" parle-t-on ici ? Quel est son nom ?

C'est le modèle de Drude : les forces sont une force de frottement fluide  $-\lambda \vec{v}$  et la force le Lorentz électrique  $q\vec{E}$ 

**12** Dans le modèle supraconducteur, on suppose que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B} \quad \text{avec} \quad \lambda = \left( \frac{m}{\mu_0 n e^2} \right)^{1/2}$$

En négligeant le courant de déplacement  $\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$  devant le courant de conduction  $\vec{j}$ , trouver l'équation différentielle satisfaite par le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le supraconducteur.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) &= \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} \text{ avec } \text{div}\vec{B} = 0 \\ &= \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} \text{ d'après M.A. qui est ici } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \vec{0} \\ \text{Comme } \overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} &= -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \Delta\vec{B} \quad \text{donc } \Delta\vec{B} = \frac{1}{\lambda^2} \Delta\vec{B} \end{aligned}$$

**13** Un champ uniforme peut-il régner à l'intérieur d'un matériau supraconducteur ?

La recherche d'une solution en champ  $\vec{B}$  uniforme, soit  $\Delta\vec{B} = \vec{0}$ , conduit à la seule solution  $\vec{B} = \vec{0}$ .

**14** Un matériau supraconducteur vérifiant l'équation de London  $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{j} = -\vec{B}/\mu_0 \lambda^2$  occupe tout le demi-espace défini par  $x \geq 0$ . Le trièdre orthonormé  $Oxyz$  est choisi de telle sorte que le champ magnétique statique régnant dans le vide extérieur ( $x < 0$ ) n'ait de composante tangentielle que suivant  $Oz$  (c'est-à-dire  $B_y = 0$ ) sur le plan  $x = 0$ . Le module du champ sur la frontière est  $B_0$  et les deux composantes  $B_x$  et  $B_y$  sont indépendantes de  $y$  et  $z$ . La question étant traitée à l'échelle microscopique, le champ est pris continu à la frontière.

Ecrire l'équation simplifiée vérifiée par  $\vec{B}$  dans le supraconducteur et donner sa solution détaillée.

On a une invariance par translation en  $x$  donc on cherche la solution de

$$\Delta\vec{B} = \frac{d^2\vec{B}}{dx^2} = \frac{1}{\lambda^2} \vec{B}$$

La solution générale de cette équation est donc une combinaison linéaire des deux solutions :

$$\vec{B} = \vec{a} e^{+x/\lambda} + \vec{b} e^{-x/\lambda}$$

- Mais le champ  $\vec{B}$  ne peut pas diverger (la zone du matériau s'étend jusqu'à l'infini en  $x$ ) donc  $\vec{a} = \vec{0}$
- Ensuite, on nous dit plus haut que le module du champ est continu sur l'interface et vaut  $B_0$  mais que le champ extérieur vérifie que  $B_y = 0$  : on en déduit donc que  $b_y = 0$
- Comme dans le matériau les deux composantes  $B_x$  et  $B_y$  sont indépendantes de  $y$  et  $z$ , écrire  $\text{div}\vec{B} = 0$  donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(b_y e^{-x/\lambda}) + \frac{\partial}{\partial z}(b_z e^{-x/\lambda}) \quad \text{ce qui donne :} \\ 0 = \frac{\partial B_x}{\partial x} + 0 + 0 &= \frac{\partial}{\partial x}(b_x e^{-x/\lambda}) = b_x \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x/\lambda}) \quad \text{ce qui permet d'en déduire que } b_x = 0 \end{aligned}$$

- On doit respecter la continuité sur l'interface donc  $b_z e^{-x/\lambda} = B_0$  en  $x = 0$  donc :

$$\vec{B}(x) = B_0 e^{-x/\lambda} \vec{u}_z$$

Qu'en déduit-on pour le champ extérieur au supraconducteur ?

Le champ extérieur est  $\vec{B}_0$  qui est imposé au supraconducteur.

**15** Déduire du champ magnétique, la densité de courant  $\vec{j}$  à l'intérieur du supraconducteur et montrer qu'il s'exerce une force  $\vec{F}$  magnétique par unité de surface à caractériser par sa direction et la pression correspondante.

$$\text{M.A. : } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} d/dx & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & B_0 e^{-x/\lambda} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 e^{-x/\lambda} \end{vmatrix} \quad \text{donc } \vec{j}(x) = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-x/\lambda} \vec{u}_y$$

Pour la force de Laplace, il faut partir de l'expression volumique . Par unité de volume  $d^3\mathcal{V} = d^2S dx$  du conducteur, la force de Laplace  $\vec{j} d^3\mathcal{V} \wedge \vec{B}$  s'écrit

$$d^3\vec{f} = d^2S dx \frac{B_0^2}{\mu_0 \lambda} e^{-2x/\lambda} \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = d^2S dx \frac{B_0^2}{\mu_0 \lambda} e^{-2x/\lambda} \vec{u}_x$$

Attention à partir de maintenant : la force surfacique associée est causée par toute la zone  $x > 0$  s'appuyant sur la surface  $d^2S = dy dz$ , et donc

$$\vec{F} = \frac{d^2\vec{f}}{d^2S} \quad \text{qui n'est pas une dérivée, mais juste une fraction, avec } d^2\vec{f} = \int_{x=0}^{x=\infty} d^3\vec{f}$$

$$\text{on va donc calculer } d^2\vec{f} = d^2S \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{B_0^2}{\mu_0 \lambda} e^{-2x/\lambda} dx \vec{u}_x$$

$$\text{ce qui donne } d^2 \vec{f} = d^2 S \frac{B_0^2}{\mu_0 \lambda} \times \frac{\lambda}{2} \vec{u}_x$$

$$\text{donc } \vec{F} = \frac{d^2 \vec{f}}{d^2 S} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \vec{u}_x$$

Une pression étant une force par unité de surface, cela correspond à notre définition de la norme de  $\vec{F}$  donc  $\frac{B_0^2}{2\mu_0}$

**16** Ce résultat dépend-il de la forme explicite de  $\vec{B}(x)$  ?

On peut recommencer le calcul en disant que  $\vec{j} d^3 \mathcal{V} \wedge \vec{B}$  s'écrit, avec  $\vec{B}(x) = B(x) \vec{u}_x$  donc

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} \vec{u}_y \quad \text{impose que } d^3 \vec{f} = -d^2 S \, dx \frac{B(x)}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\text{on va donc calculer } d^2 \vec{f} = -d^2 S \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{B(x)}{\mu_0} \frac{\partial B(x)}{\partial x} dx \vec{u}_x = -d^2 S \left[ \frac{B^2}{2\mu_0} \right]_{x=0}^{\infty} \vec{u}_x = d^2 S \left[ \frac{B^2(0)}{2\mu_0} - \frac{B^2(\infty)}{2\mu_0} \right] \vec{u}_x$$

et comme  $\vec{B}$  dans le matériau décroît exponentiellement,  $B(\infty) = 0$  donc  $\vec{F} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \vec{u}_x$

ce qui est donc le même résultat que précédemment, sans avoir utilisé la forme exponentielle de la courbe, donc le résultat ne dépend que des bornes de la fonction  $B(x)$  et pas de sa forme explicite.

Exprimer la pression en fonction de la densité de courant surfacique. Commentaire.

$$\vec{j}_S = \int_0^{\infty} \vec{j}(x) dx = \int_0^{\infty} -\frac{1}{\mu_0} B'(x) dx \vec{u}_y = \frac{B_0}{\mu_0} \vec{u}_y$$

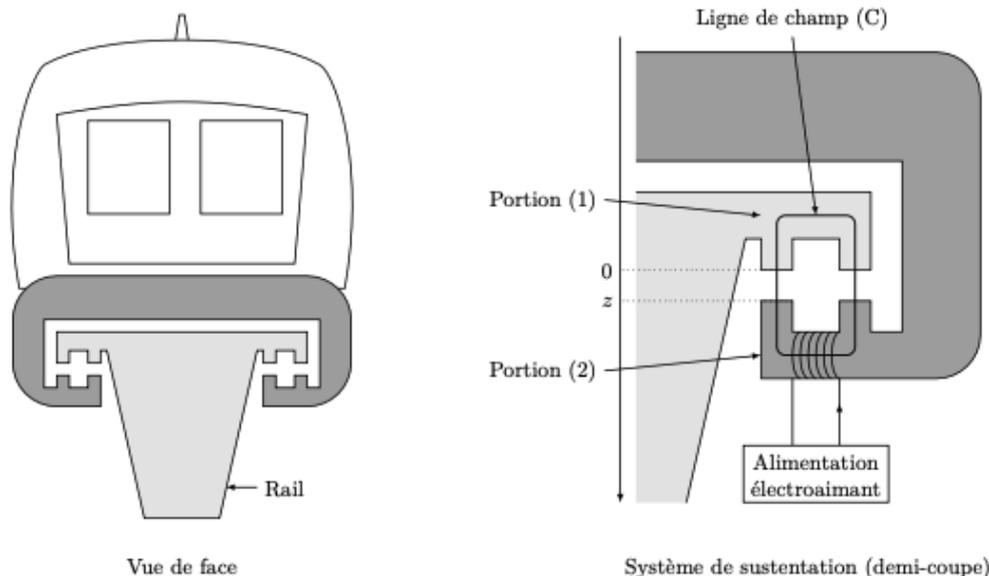
Ainsi la pression est

$$p = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \mu_0 \frac{j_S^2}{2}$$

**17** Modélisation du champ magnétique dans l'entrefer

La figure ci-dessous présente la rame du Transrapid sur son rail et, dans un plan de coupe, le détail du système de sustentation. Ce système est constitué d'un électroaimant dont le circuit magnétique est composé :

- d'une portion (1) en matériau ferromagnétique doux de perméabilité relative  $\mu_r$  ;
- d'une portion (2) solidaire de la rame, constituée du même matériau ferromagnétique, sur lequel sont bobinées  $N$  spires alimentées par un courant d'intensité  $i(t)$ .



Les deux portions sont séparées par un entrefer de largeur  $z$  variable. La section  $S$  du matériau ferromagnétique dans les portions (1) et (2) du circuit magnétique est supposée commune aux portions (1) et (2), constante le long du circuit magnétique et carrée de côté  $a$  :  $S = a^2$ .

(C) est une ligne de champ magnétique du circuit (figure ci-dessus).

Les hypothèses d'étude sont les suivantes :

- les milieux ferromagnétiques sont supposés doux ;
- on néglige les pertes par courants de Foucault ;
- toutes les lignes de champ sont canalisées par le circuit magnétique.

On note :

- $\vec{B}_1$  le champ magnétique dans la portion (1) ;
- $\vec{B}_2$  le champ magnétique dans la portion (2) ;
- $\vec{B}_a$  le champ magnétique dans les entrefers ;
- $z$  la largeur, variable, des entrefers entre les deux portions ferromagnétiques du circuit magnétique (l'origine  $O$  sur l'axe descendant ( $O, \vec{u}_z$ ) est choisie sur le rail fixe) ;
- $\ell$  la longueur moyenne de la partie de la ligne de champ (C) située à l'intérieur des portions ferromagnétiques (1) et (2) du circuit.

Expliquez les remarques "les milieux ferromagnétiques sont supposés doux" "on néglige les pertes par courants de Foucault", et pour la seconde remarque, donner un exemple détaillé de pertes thermiques dans un cylindre soumis à  $\vec{B}$

- "les milieux ferromagnétiques sont supposés doux" = ils vont canaliser les lignes de champ
- "on néglige les pertes par courants de Foucault" = il n'y a pas de pertes "fer" ici
- pertes thermiques par courants de Foucault = voir cours poly 13 (exemple 1) où on a montré que la puissance moyenne dissipée, pour un champ extérieur sinusoïdal, est pour un cylindre de hauteur  $\ell$  et de rayon  $R$  :

$$P_J = \frac{1}{8} B_0^2 \gamma \omega^2 \times 2\pi \ell \times \frac{R^4}{4}$$

**18** Définir l'excitation magnétique  $\vec{H}$  et donner l'expression reliant le vecteur  $\vec{H}$  au champ magnétique  $\vec{B}$  dans la matière et à l'aimantation  $\vec{M}$  de la matière.

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

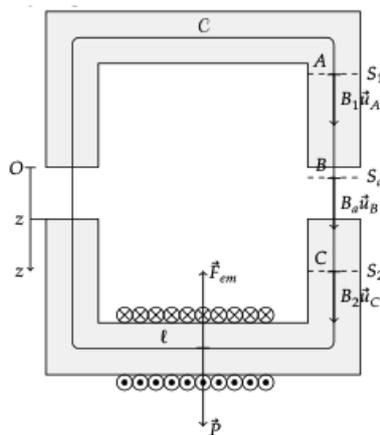
et l'excitation magnétique permet de comprendre que  $\mu_0 \vec{H}$  est le champ magnétique créé par les courants mais dans le vide (sans tenir compte des matériaux)

**19** Rappeler les équations de Maxwell valables dans un milieu ferromagnétique dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \text{Maxwell-Gauss} \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Maxwell-Faraday} \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & \text{Maxwell-Thomson} \\ \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \vec{0} & \text{Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

**20** Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique dans le circuit magnétique ?

L'équation de Maxwell-Thomson donne comme résultat que le flux  $\Phi$  de  $B$  à travers la section du matériau est constante. C'est l'analogue du courant électrique dans un circuit électrique de conducteurs.



**21** En déduire les relations liant  $\vec{B}_1$ ,  $\vec{B}_2$  et  $\vec{B}_a$ .

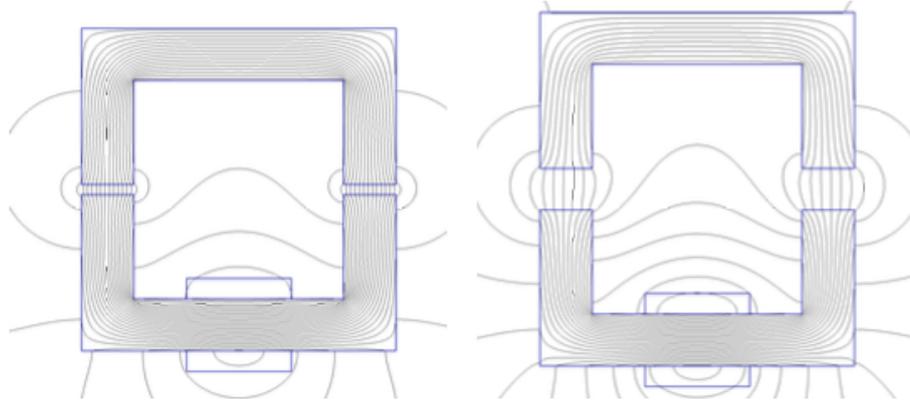
La conservation du flux  $\Phi$  donne donc

$$B_1 S_1 = B_a S_a = B_2 S_2$$

**22** À quelle condition, supposée vérifiée ici, les lignes de champ restent-elles parallèles dans l'entrefer ?

Comme on le voit sur les tracés ci-dessous donnés dans l'énoncé, les lignes de champ restent parallèles si l'entrefer reste de faible épaisseur  $e$  que l'on peut caractériser par

$$e \ll a$$



**23** Rappeler les caractéristiques d'un milieu ferromagnétique doux.

Pour un matériau "doux", la réluctance  $\mathcal{R}_m$  est faible, la valeur de  $\mu_r$  est grande, les lignes de champ sont canalisées.

**24** Quelle relation lie alors le champ magnétique  $\vec{B}$  et l'excitation magnétique  $\vec{H}$  dans un tel milieu ?

Pour le train, on ne veut pas d'aimantation rémanente (qui empêcherait de contrôler totalement la hauteur dont s'élève le train au dessus des rails), donc le milieu (donc son aimantation) est en plus **linéaire** (dit LHI) et donc

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$$

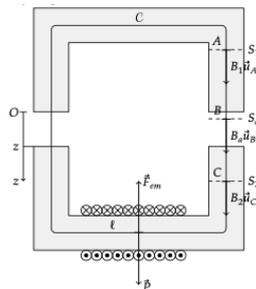
**25** Définir la perméabilité relative

$$\mu_r = (1 + \chi_m)$$

et en donner un ordre de grandeur pour un milieu ferromagnétique doux.

La perméabilité des ferromagnétiques est souvent comprise entre  $1 \cdot 10^3$  et  $2 \cdot 10^5$ .

**26** Écrire le théorème d'Ampère sur le contour ( $\mathcal{C}$ ).



Le théorème d'Ampère, pour  $N$  spires de bobinage parcourues par un courant  $i$ , sur le contour  $\mathcal{C}$  est

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = Ni$$

**27** En déduire  $B_2$  en fonction de  $\ell$ ,  $z$ ,  $N$ ,  $i$ ,  $\mu_0$  et  $\mu_r$ .

En appliquant la circulation de  $H$ , avec la notation  $z = e$  sur le schéma, on a

$$H_1\ell_1 + H_2\ell_2 + 2zH_a = Ni$$

Avec les conventions données en début d'énoncé, on a donc, en tenant compte de  $B_1 = B_2 \approx B_a$  du fait de  $z^2 \ll S_1$  :

$$B_2 \left( \frac{\ell}{\mu_0\mu_r} + \frac{2z}{\mu_0} \right) = Ni.$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 Ni}{\frac{\ell}{\mu_r} + 2z}$$

**28** Simplifier cette écriture en utilisant les résultats précédents pour exprimer  $B_2$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $z$  et  $i$

On ne cite plus  $\mu_r$  ce qui laisse à penser que l'on utilise ici le fait que  $\mu_r \gg 1$ , ce qui permet de simplifier l'équation en

$$B_2 = \frac{\mu_0 Ni}{2z}$$

**29** On rappelle que la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile d'un circuit magnétique, parcouru par un courant d'intensité  $i$ , en translation suivant la direction  $\vec{u}_z$  s'écrit

$$\vec{F}_{em} = \left( \frac{\partial E_m}{\partial z} \right)_i \vec{u}_z$$

où  $E_m$  est l'énergie magnétique.

**Erreur de numérotation**

**30** Montrer que l'inductance propre  $L(z)$  du bobinage peut s'écrire sous la forme  $L(z) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z}$ .

On note  $\Phi_N$  le flux du champ magnétique à travers la bobine :  $\Phi_N = NSB_2 = N\Phi$ . Le flux propre de la bobine est telle que  $\Phi = Li$ . Donc

$$L(z) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2z}$$

**31** Rappeler l'expression de l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine d'inductance  $L(z)$  parcourue par le courant d'intensité  $i(t)$ .

L'énergie magnétique est  $E_m = \frac{1}{2}L(z)i^2$

**32** En déduire la force électromagnétique  $F_{em}$  s'exerçant sur la rame.

En utilisant le rappel de l'énoncé :

$$\vec{F}_{em} = \frac{1}{2} \frac{dL(z)}{dz} i^2 \vec{u}_z \text{ d'où } \vec{F}_{em} = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4z^2} \vec{u}_z$$

**33** Calculer la masse  $m$  qui peut ainsi être mise en sustentation à une distance  $\delta = 10$  mm du rail pour un électroaimant alimenté avec un courant d'intensité  $i_e = 10$  A.

À l'équilibre :  $\vec{F}_{em} + m\vec{g} = \vec{0}$ .

$$m = \frac{\mu_0 N^2 S i_e^2}{4g\delta^2}$$

**34** Une rame de train a une masse d'environ 180 tonnes. En déduire le nombre d'électroaimants nécessaires pour la sustentation de la rame. On donne :  $N = 1000$ ,  $S = 0,50$  m<sup>2</sup>.

Application numérique :  $m \approx 1,5 \cdot 10^4$  kg Ensuite, on a simplement, pour  $m_r = 180$  tonnes :

$$n = \frac{m_r}{m} = \frac{4gm_r\delta^2}{\mu_0 N^2 S i_e^2} \approx 11$$

**35** Montrer que le système de sustentation électromagnétique est instable.

La force magnétique  $\vec{F}_{em} = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4z^2} \vec{u}_z$  est associée à une énergie potentielle (force conservative) telle que  $\vec{F}_{em} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_1$ , donc  $\vec{F}_{em} \cdot d\vec{l} = -dE_1$  :

$$E_1 = \int +\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4z^2} dz = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4z} + cste$$

On lui ajoute l'énergie potentielle de pesanteur  $E_2 = -mgz + cste$

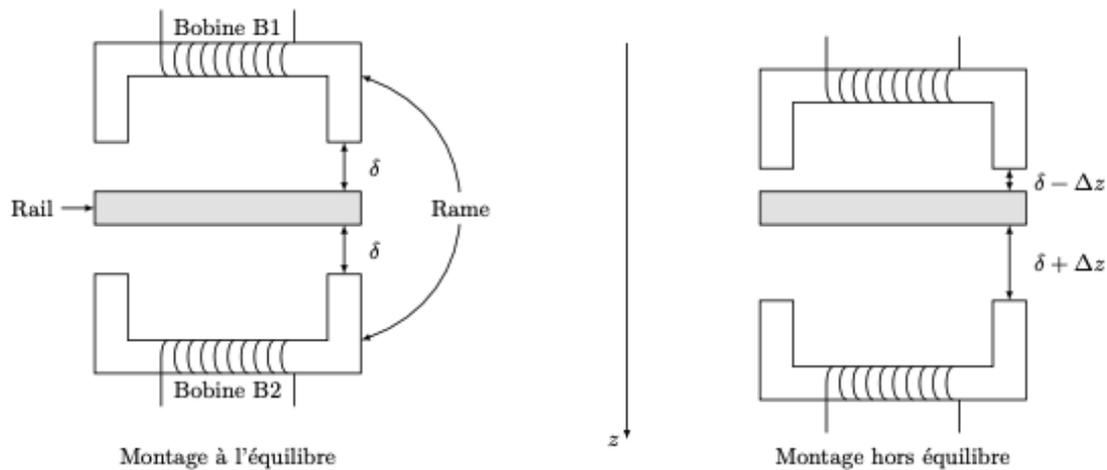
L'énergie potentielle totale est donc  $E_1 + E_2$  et la position d'équilibre correspond à  $\frac{d(E_1 + E_2)}{dz} = 0$  mais la dérivée

seconde est  $\frac{d^2(E_1 + E_2)}{dz^2} = -\frac{\mu_0 N^2 S i^2}{2z^3} + 0 < 0$  en  $z_{eq}$  donc c'est un maximum, ce qui veut dire que l'équilibre ne sera pas stable (on n'a pas ici le cas d'une "cuvette" d'énergie potentielle)

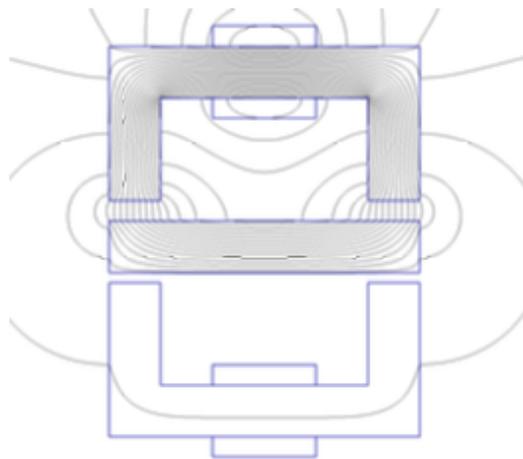
**36** L'instabilité de l'équilibre de la rame en sustentation nécessite l'asservissement en position de l'entrefer. Cet asservissement est réalisé en utilisant un capteur de position. On se propose dans cette partie d'étudier le principe d'un capteur de position à inductance variable.

La figure ci-dessous décrit le schéma de principe d'un capteur inductif à entrefer variable dans un montage "push-pull". Le capteur comprend un circuit magnétique composé d'un noyau solidaire du rail fixe et de deux bobines B1 et B2 sur deux noyaux ferromagnétiques en vis-à-vis, solidaires de la rame. Les bobines B1 et B2 du capteur sont identiques et placées de façon symétrique par rapport au rail lorsque la rame est à l'équilibre (figure à gauche).

Ces bobines B1 et B2 sont indépendantes des bobines assurant la lévitation. Elles sont constituées de  $N_c$  spires de surface  $S$ .



La simulation numérique ci-dessous montre que, lorsque seule la bobine  $B_1$  est utilisée, les lignes de champ magnétique traversent le rail et que le couplage par inductance mutuelle entre les deux bobines est négligeable devant l'auto-induction.



Écrire l'inductance  $L_e$  des bobines B1 et B2 lorsque la rame est à l'équilibre.

Lorsque seule la bobine  $B_1$  est utilisée, les lignes de champ magnétique traversent le rail et on voit sur les simulations que le couplage par inductance mutuelle entre les deux bobines est négligeable devant l'auto-induction. On peut alors estimer l'inductance de chaque bobine (puisque les circuits magnétiques sont identiques) :

$$L_e = \frac{\mu_0 N_e^2 S}{2\delta}$$

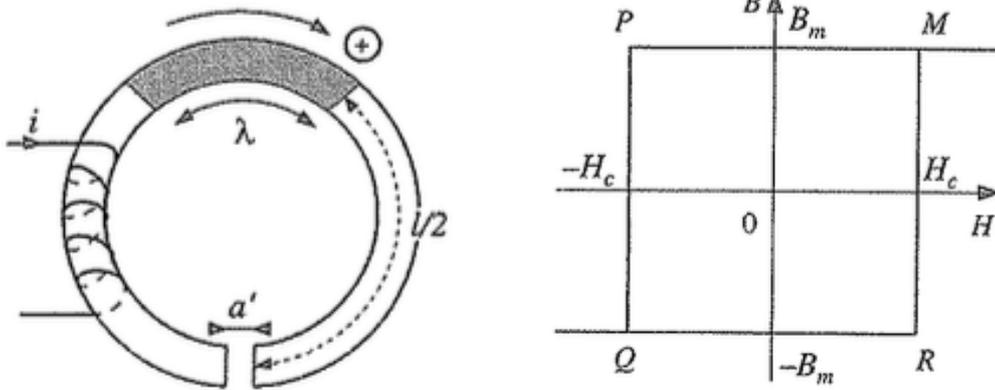
**37** On envisage une variation  $\Delta z$  de la position du train par rapport à la position d'équilibre  $z_e = \delta$  (figure à droite), en considérant  $\Delta z \ll \delta$ .

Écrire les inductance  $L_1$  et  $L_2$  de chacun des bobines B1 et B2 en se limitant au terme du premier ordre en  $\Delta z/\delta$ .

En utilisant le schéma hors équilibre, on a

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\mu_0 N_e^2 S}{2(\delta - \Delta z)} \approx L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right) \\ L_2 = \frac{\mu_0 N_e^2 S}{2(\delta + \Delta z)} \approx L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right) \end{cases}$$

**38** On veut étudier le matériau magnétique en le plaçant dans le circuit magnétique suivant :



Un volume torique, de faible épaisseur par rapport au rayon moyen est constitué de trois parties :

- une pièce de matériau ferromagnétique dur (aimant), de longueur  $\lambda = 4$  cm,
- deux pièces en matériau ferromagnétique doux, de longueur totale  $l = 20$  cm,
- un entrefer d'épaisseur  $a$ , de même section que le tore.

Le matériau dur est caractérisé par un **cycle d'hystérésis rectangulaire** avec les valeurs remarquables  $B_m = 1$  T et  $H_c = 5 \cdot 10^4$  A · m<sup>-1</sup>.

Le matériau doux est **linéaire**, de perméabilité relative  $\mu_r = 5000$ . Dans le bobinage de  $N = 4000$  tours de fil autour du noyau magnétique, circule un courant d'intensité  $i$ . Les fuites magnétiques sont négligeables.

Ecrire le théorème d'Ampère

$$\frac{B}{\mu_0} \cdot a + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \cdot \ell + H \lambda = Ni$$

et en déduire une relation donnant  $B$  dans le milieu en fonction de  $a$ ,  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $\mu_r$ ,  $\ell$ ,  $H$ ,  $\lambda$  et  $i$

$$B \left( a + \frac{\ell}{\mu_r} \right) = \mu_0 (Ni - \lambda H)$$

**39** Réécrire cette relation d'Ampère pour faire apparaître le circuit magnétique équivalent, les réluctances  $R_a$  de l'air et  $R_f$  du matériau étant reliées à deux "générateurs" que vous décrivez.

$$Ba + \frac{B\ell}{\mu_r} = \mu_0 Ni - \mu_0 \lambda H$$

$$\frac{BSa}{\mu_0 S} + \frac{BS\ell}{\mu S} = Ni - \lambda H$$

$$\frac{\Phi a}{\mu_0 S} + \frac{\Phi \ell}{\mu S} = Ni - \lambda H$$

$$\Phi(\mathcal{R}_a + \mathcal{R}_f) = Ni - \lambda H$$

On a donc un circuit **série** constitué par deux réluctances  $\mathcal{R}_a$  et  $\mathcal{R}_f$  et deux générateurs de force motrice  $Ni$  et  $-\lambda H$

**40** Exprimer les pertes "fer" dans ce matériau si  $i = i_0 \cos(\omega t)$  avec  $H(i_0) > H_c$

Il n'y a pas de pertes fer dans le matériau doux, mais dans l'aimant (matériau dur), la valeur de  $H(i_0)$  dépassant  $H_c$ , les pertes  $P_H$  sont proportionnelles à l'aire du cycle  $P_H = 4B_m H_c \times \lambda S$  mais  $S$  n'était pas indiqué dans l'énoncé.

— FIN —