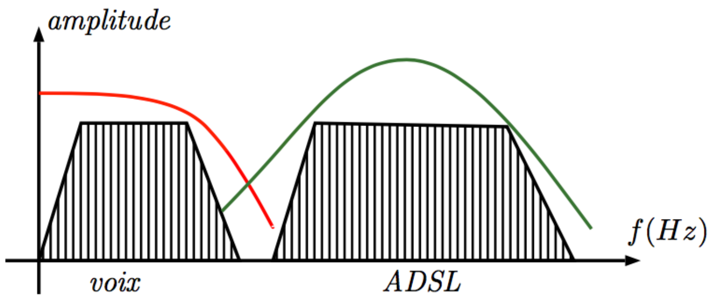
# CORRIGÉ DU DEVOIR

## 1. Etude d'un filtre passif : filtrage ADSL

Les signaux transmis sur une ligne téléphonique utilisent une large gamme de fréquences divisée en deux parties : les signaux vocaux (transmettant la voix, entre 0 et 4 kHz) et les signaux ADSL (pour Internet ou la VoIP, entre 25 kHz et 2MHz). On considèrera dans ce second cas que les signaux ADSL utilisent toutes les fréquences supérieures à 25 kHz.

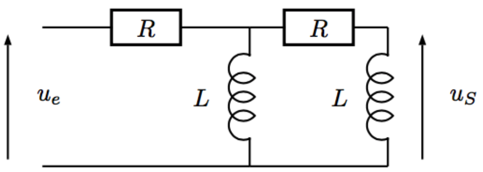
1. 1 Quels types de filtre faut-il utiliser pour récupérer chacun des deux types de signaux ? On précisera les éventuelles fréquences de coupure.

*Comme on l'a montré dans le cours sur les spectres de Fourier, on superpose le gain réel et le spectre pour montrer visuellement l'effet du filtre sur le signal d'entrée.*
*Comme l'énoncé ne précise pas la composition exacte des deux spectres mêlés, quand on lit "...les signaux vocaux (transmettant la voix, entre 0 et 4 kHz) et les signaux ADSL (pour Internet ou la VoIP, entre 25 kHz et 2MHz)...", on va représenter sous forme de trapèze chacun des signaux (voix et ADSL)*




*Pour récupérer la voix, il faut un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure entre $4\,kHz$ et $25\,kHz$, et pour récupérer seulement l'ADSL ou la voix VoIP, il faut un filtre passe-haut ou un filtre passe-bande entre $25\,kHz$ et $4\,MHz$, comme c'est représenté sur le schéma ci-dessus.*

1. 2 On réalise le filtre suivant. Déterminer sa nature grâce aux schémas équivalents et sans calculs. Quels signaux va-t-il permettre de récupérer ?




*A haute fréquence, donc pour $\omega \to \infty$, les bobines sont équivalentes à des interrupteurs ouverts ce qui signifie qu'aucun courant ne circule dans les résistances $R$, donc la tension à leurs bornes est nulle donc $u_e = u_S$ (en prenant une grande loi des mailles), donc $G = 1$ le gain est donc dit unitaire.*
*A basse fréquence, donc pour $\omega \to 0$, les bobines sont équivalentes à des fils ce qui signifie que $u_S = 0$, le gain est nul.*
*Le filtre ressemble donc à un filtre passe-haut.*

1. 3 En posant $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, déterminer $\omega_0$ pour que $H$ se mette sous la forme $H(x) = \dfrac{-x^2}{1+3j.x-x^2}$

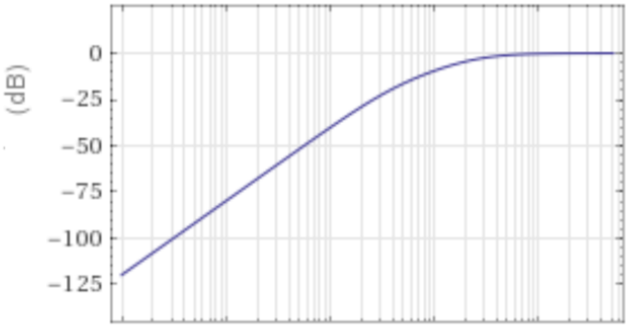
*Si l'on nomme $u_1$ la tension aux bornes de la bobine de gauche et $u_S$ celle aux bornes de la bobine de droite comme sur le schéma, on a* $H = \dfrac{u_S}{u_e} = \dfrac{u_S}{u_1} \times \dfrac{u_1}{u_e} = \dfrac{Z_L}{Z_L+R} \times \dfrac{Z_E}{Z_E+R}$ *avec* $Y_E = \dfrac{1}{Z_L} + \dfrac{1}{Z_L+R}$ *qui correspond à l'admittance de l'association parallèle de $L$ et ($R, L$ en série).*

*On a donc* $H = \dfrac{Z_L}{Z_L+R} \times \dfrac{1}{1+R.Y_E} = \dfrac{Z_L}{Z_L+R} \times \dfrac{1}{1+R.\left(\dfrac{1}{Z_L}+\dfrac{1}{Z_L+R}\right)} = \dfrac{Z_L}{R+Z_L+2R+R^2/Z_L}$ *ce qui donne donc* $H = \dfrac{Z_L^2}{R^2+3RZ_L+Z_L^2} = \dfrac{-\omega^2\,L^2}{R^2+3jL\,R\,\omega-\omega^2\,L^2}$

*On obtient la forme demandée en posant $\omega_0 = \dfrac{R}{L}$. Notez bien, comme je l'ai dit en cours, que $\omega_0$ change d'expression en fonction du circuit étudié.*

1. 4 Tracer le diagramme de Bode asymptotique et ajouter l'allure du tracé réel

*Le diagramme asymptotique est basé sur les limites de $H$ avec :*
$H(\omega \to 0) = \dfrac{-L^2\omega^2}{R^2} = -x^2$ *et* $H(\omega \to \infty) = 1$ *donc* $G_{dB}(\omega \to 0) = +40.\log_{10}(x)$ *et* $G_{dB}(\omega \to \infty) = 0$



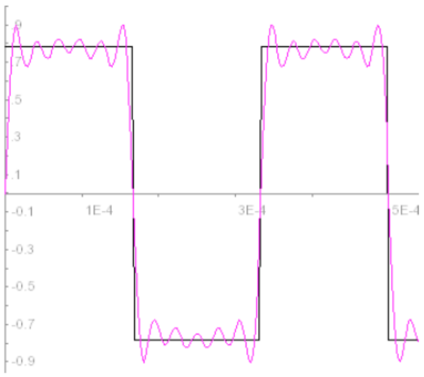

1. 5 On prend $R = 100\Omega$ , quelle valeur de $L$ faut-il choisir pour réaliser le filtre voulu ? On considèrera que la fréquence de coupure retenue est associée à la pulsation $\omega_0$ et vaut 10kHz.

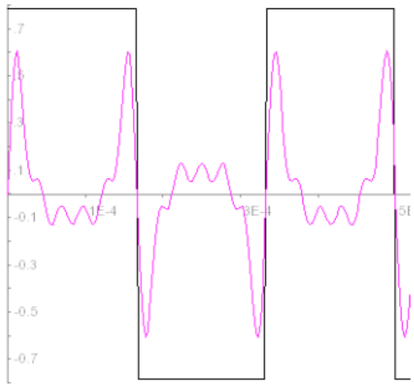
*On utilise $2\pi f_c = \omega_c = \dfrac{R}{L}$ ce qui permet d'obtenir $L = \dfrac{R}{2\pi f_0} = 1,6\,mH$*

1. 6 Un signal carré de fréquence fondamentale $f_0 = 3\,kHz$ est envoyé à l'entrée du filtre. Quelles seront les harmoniques présentes à la sortie ?

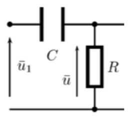
*Le signal créneau est représenté sur les tracés ci-dessous, on superpose informatiquement un développement de Fourier jusqu'à $n = 12$ (tracés à gauche) et on montre le signal correspondant au spectre du signal filtré (tracés à droite) superposé au créneau d'entrée.*

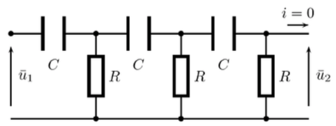
*Le signal créneau possède un spectre de Fourier que l'on a "révisé" en cours : des pics aux pulsations multiples impairs de $\omega_0$ Le signal d'entrée est donc profondément modifié en sortie : le filtre passe-haut dont la fréquence de coupure est $f_c = 10kHz$ coupe totalement $f_0 = 3\,kHz$ et atténue un peu moins $3f_0 = 9\,kHz$ et et laisse quasiment inchangées (gain égal à 1) les autres fréquences du spectre de Fourier.*



**2. Filtre (**)**




2. 1 Sur le schéma de gauche, on a un filtre RC simple. Rappeler la nature du filtre ainsi que la fonction de transfert $H_1 = \dfrac{u}{u_1}$ :

*Le filtre est un passe-haut et* $H_1 = \dfrac{u}{u_1} = \dfrac{R}{R+Z_c} = \dfrac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$

2. 2 Tracer le diagramme de Bode correspondant :

*le diagramme de Bode correspondant est celui d'un passe-haut du 1er ordre avec des pentes à +20 dB/décade puis 0.*

2. 3 Sur le schéma de droite, on associe R et C pour aboutir à ce "triple RC". Déterminer la fonction de transfert $H_3 = \dfrac{u_2}{u_1}$ :

*on étudie un "triple RC" de type passe-bas (en faisant les limites $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$). On peut écrire les associations successives en tenant compte des noeuds (donc attention à l'écriture des diviseurs de tension),*

$$H_3 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{(jRC\omega)^3}{1+5(jRC\omega)+6(jRC\omega)^2+(jRC\omega)^3}$$

*Détail du calcul : on appelle $u_1'$ et $u_1''$ les deux tensions aux bornes des R entre $u_1$ et $u_2$. On a en partant de la droite :*

$$u_2 = \frac{R}{R+Z_C}u_1''$$

*Mais ensuite,*

$$u_1'' = u_1'\frac{Z_e}{Z_e+Z_C}$$

*avec les deux branches parallèles*

$$Z_e = R//(R+Z_C) = \frac{R(R+Z_C)}{2R+Z_C}$$

*Une dernière fois*

$$u_1' = u_1\frac{Z_e'}{Z_e'+Z_C}$$

*avec*

$$Z_e' = R//(Z_C+Z_e) = \frac{R(Z_C+Z_e)}{R+Z_C+Z_e}$$

*On termine avec*

$$H_3 = \frac{u_2}{u_1''}\frac{u_1''}{u_1'}\frac{u_1'}{u_1}$$

2. 4 Donner l'allure du diagramme de Bode asymptotique correspondant (en gain et en phase) :

*le diagramme de Bode asymptotique correspondant est celui d'un passe-haut du 3e ordre avec une pente à +60 dB/décade (cela change des pentes à +20) pour $\omega \to 0$ et une pente 0 pour $\omega \to \infty$*

2. 5 La résolution numérique de l'équation $1+5x+6x^2+x^3 = 0$ fournit les trois solutions $x_1 = -5,049$, $x_2 = -0,643$ et $x_3 = -0,308$. On impose à l'entrée du dispositif un échelon montant de tension ($u_1(t)$ est nul pour $t \leq 0$, et constant égal à $E_0 > 0$ pour $t > 0$). Déterminer la forme de $u_2(t)$ :

*on passe à l'équation différentielle en commençant comme vu dans le cours par :*

$$u_2\left(1+5(jRC\omega)+6(jRC\omega)^2+(jRC\omega)^3\right) = ... \text{ où } j\omega u_2 = \frac{du_2}{dt}$$

*par exemple, puis ensuite avec la dérivée seconde puis troisième.*
*L'équation caractéristique de cette équation différentielle est donc*

$$1+5x+6x^2+x^3 = 0$$

*donc la solution de l'équation est donc une combinaison linéaire des exponentielles des solutions sous la forme donc de*

$$u_2(t) = \alpha e^{x_1 t/RC} + \beta e^{x_2 t/RC} + \gamma e^{x_3 t/RC}$$