

Sujet partiel CCINP PSI  
Corrigé

CONCOURS COMMUN INP - ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

PHYSIQUE - CHIMIE

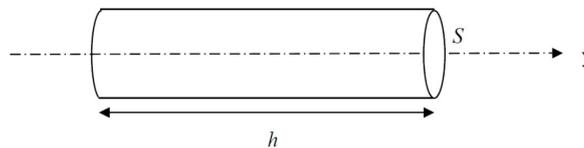
Lundi 4 mai : 14 h - 18 h

— Surtout travailler les parties II et III —

Je prends appui sur un corrigé que j'ai trouvé sur Internet. Peut-être est-ce aussi celui-là que vous avez trouvé. Je vais ajouter quelques remarques en bleu là où cela s'avèrera nécessaire, en plus de la copie du corrigé en noir.

**Partie 1. Conducteur Ohmique** : facultatif mais cela fait réviser le cours sur la diffusion de charges. Nous verrons bientôt deux (voire trois en fait) autres diffusions dont nous verrons justement que les équations différentielles sont cousines. Il est donc bien de retenir correctement ce premier cas.

Q 1



$$\text{Loi d'Ohm locale : } \boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \text{grad} V}, \quad \boxed{\gamma_{\text{Cu}} \approx 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}}.$$

La question est classique et on remarque ici que la direction de  $\vec{j}$  est imposée par le fil. On utilise aussi la traduction de  $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$  pour exprimer la relation entre  $\vec{E}$  et  $V$ . L'énoncé "oublie" ici de dire que l'on est dans l'ARQS et c'était à préciser. C'était "dissimulé" dans la remarque "...parcouru par un courant électrique constant et uniformément réparti de vecteur densité volumique de courant ..."

Remarquez le cas de  $h$  supposé assez grand pour qu'il n'y ait pas d'effets de bord, comme si le cylindre était infini. Pour l'ordre de grandeur, vous comprenez pourquoi on vous le demande :  $\gamma$  semble être "grand" car le métal choisi est bon conducteur, mais quelle valeur ? Si vous n'avez pas d'idée, utilisez la formule de la résistance  $R = \frac{1}{\gamma} \frac{h}{S}$  avec une résistance  $R \approx 0,1 \Omega$  pour  $1 \text{ m}$  de fil de section  $S = 1 \text{ mm}^2$  d'où  $\gamma(\text{métal} = \text{Cuivre}) = \frac{1}{R} \frac{h}{S} \approx \frac{1}{0,1} \times \frac{1}{1 \times 10^{-6}}$

Q 2

Nous n'avons pas encore fini le programme et il reste trois autres types de vecteurs densité de courant : conduction thermique, diffusion de particules matérielles, diffusion de quantité de mouvement. C'est pour montrer l'importance d'assimiler déjà le modèle de conductivité électrique et la loi locale d'Ohm, associé au modèle de Drude.

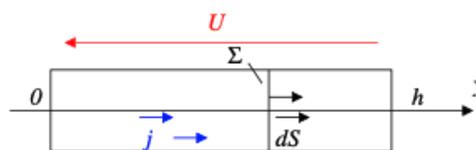
$$\begin{aligned} \vec{j} &= \gamma \vec{E} \cdot \vec{j} = -\gamma \text{grad}(V) & \vec{j}_e & \text{ en } \text{A} \cdot \text{m}^{-2} \\ \vec{j}_{\text{th}} &= -\lambda \text{grad}(T) & \vec{j}_{\text{th}} & \text{ en } \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \\ \vec{j}_D &= -D \text{grad}(n) & \vec{j}_D & \text{ en } (\text{particules}) \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

Tout cela a l'air très différent du point de vue des unités, mais les équations différentielles de mouvements sont en revanche très proches...

Q 3

Il est important de bien repérer le sens de  $\vec{j}$  pour une différence de potentielle  $U$  positive. En effet,  $\vec{j} = \rho \vec{v} = \gamma \vec{E}$  avec  $\vec{E} = -\text{grad} V$  dans l'ARQS ce qui fait que les particules positives descendent les potentiels alors que les électrons les remontent.

$$\text{Q03. } I = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} j \vec{u}_y \cdot dS \vec{u}_y = j \iint_{\Sigma} dS \Rightarrow \boxed{I = j \times S}$$



$$U = \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^h E \vec{u}_y \cdot dy \vec{u}_y = E \times h \Rightarrow \boxed{U = \frac{j}{\gamma} \times h}$$



**Q 7** Nous avons là une manière originale de parler de l'effet de peau : plutôt que de définir que la zone dans laquelle l'amplitude de  $j(x, t)$  est non négligeable est entre 0 et  $\delta$ , on utilise le résultat de l'intégrale sur le volume. Cette intégrale est donc :

$$P_{Joule} = \int_x \int_y \int_z \frac{1}{\gamma} \left( j_0 e^{-x/\delta} \cdot \cos \left( \omega t - \frac{x}{\delta} \right) \right)^2 dx dy dz$$

**Q07.** Puissance volumique instantanée dissipée par effet Joule :  $p_v(t) = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \|\vec{E}\|^2$ .

En combinant l'expression de  $P_{Joule}$  et de l'intensité efficace on en déduit :

$$P_{Joule} = \frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma} = \frac{4I_{\text{eff}}^2}{p^2 \delta^2} \times \frac{p h \delta}{4\gamma} \Rightarrow P_{Joule} = \frac{h}{\gamma \times (p\delta)} I_{\text{eff}}^2$$

On en déduit par identification  $R = \frac{h}{\gamma \times (p\delta)}$ , tout se passe comme si le courant occupait non pas tout le conducteur selon la direction ( $Ox$ ) mais se **localisait au voisinage de la surface sur une épaisseur**  $\delta$ , cette longueur nommée « épaisseur de peau » indique qu'un courant variable pénètre de manière limitée dans un conducteur ohmique.

Rappel :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$ , l'effet de peau augmente avec la fréquence,  $\delta \rightarrow 0$  pour  $\omega \rightarrow \infty$

**Q 8** La conductivité infinie correspond à ce que l'on voit écrit souvent comme "supra-conductivité" liée à une température extrêmement basse.

**Q08.** Pour une conductivité infinie, la résistance du matériau est nulle et  $P_{Joule} = 0$ . Pour une conductivité nulle, aucun courant ne circule dans le matériau  $P_{Joule} = 0$  (remarque : la formulation à  $I_{\text{eff}}$  fixée est étrange).

On a  $P_{Joule} = \frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma} = R I_{\text{eff}}^2$  et  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$

Pour comprendre la remarque ci-dessus, il faut comprendre que le courant dans un isolant est nul donc seul le 2e cas utilise l'expression de  $R$  puisque la réécriture de  $R$  donne :

$$R = \left( \frac{h}{p \gamma \delta(\gamma)} \right)$$

Cette expression est une fonction décroissante de  $\gamma$  donc à  $I_{\text{eff}}$  donné (donc constant), on a donc à étudier seulement l'évolution de  $R$ . On a ainsi :

$$R = \frac{h}{p \gamma} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} = K \gamma^{-\frac{1}{2}}$$

**Q 9** On a donc  $R = \frac{h}{p \gamma} \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}} = K \omega^{\frac{1}{2}} = A f^{\frac{1}{2}}$

**Q09.**  $R \propto \frac{1}{\delta}$  et  $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{f}}$  donc  $R \propto \sqrt{f}$ , c'est à dire  $\alpha = 1/2$ . Toutes choses égales par ailleurs, la **puissance dissipée augmente donc avec la fréquence**.

## Partie 2. Machine à courant continu (MCC)

**Q 10** si on a un grand nombre de spires en série alors  $R$  et  $L$  sont grandes d'après la loi d'association série

**Q10.** Dans l'énoncé, il est indiqué que l'inducteur, le stator pour une MCC, est constitué d'un grand nombre de spires en série et parcourues par un courant d'intensité plutôt « faible ». Pour l'induit, les spires sont en parallèle et un courant plus intense les parcourt.

De ces informations, on conclut que la **résistance de l'inducteur doit être plutôt importante et l'inductance élevée et inversement pour l'induit**, en conséquence :

$B$  : inducteur et  $A$  : induit

**Q 11** Il faut citer aussi la loi de Faraday :  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

**Q11.** D'après la question 9, la résistance augmente avec la fréquence. Du fait de l'effet de peau, le courant se concentre en haute fréquence à la périphérie du fil, la section utile diminue.

Équation de Maxwell-Faraday : 
$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

**Loi de Lenz :** « l'induction par ses effets tend à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance ».

L'induction est plus importante à haute fréquence (dérivée temporelle du champ magnétique) et du fait de la loi de Lenz, **les courants induits tendent à s'opposer au champ magnétique qui les a créés** et donc à réduire les inductances propres.

La résistance augmente avec la fréquence :  $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S}$  avec  $S$  qui diminue puisque  $\delta$  diminue.

Les phénomènes d'induction s'opposent à la cause qui leur a donné naissance.

Pour l'inductance  $L$ , on a  $\Phi = Li$

**Q 12** Pourquoi avoir bloqué le rotor ? Pour le rotor, on a montré que l'équation électrique est :

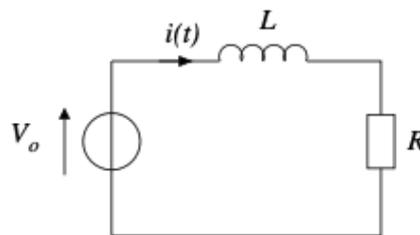
$$\text{Equation de la MCC : } U = Ri + L \frac{di}{dt} + E \quad \text{avec } E = \Phi_0 \Omega$$

Nous avons ici avec le rotor bloqué  $\Omega = 0$  ce qui permet d'avoir une équation électrique simple ne citant que  $R$  et  $L$

**Q12.** Si le rotor tourne, une force électromotrice apparaît et le circuit ne se résume pas à l'association série d'une inductance et d'une résistance.

L'intensité au sein du circuit vérifie l'équation différentielle :

$$V_0 = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$



En régime permanent  $i_\infty = V_0/R$ . Avec  $V_0 = 10 \text{ V}$  et  $i_\infty = 2,0 \text{ A}$  (asymptote horizontale), on en déduit  $R = 5,0 \Omega$ .

La constante de temps  $\tau = L/R$  s'obtient en considérant la méthode des « 63% »,  $\tau \approx 0,6 \text{ ms}$ , c'est à dire  $L \approx 3 \text{ mH}$ .

Les valeurs obtenues sont cohérentes avec les valeurs proposées.

**Partie 3. Commande de la MCC** : le sujet veut montrer comment fournir une tension différente de celle (fixe) du générateur  $U_0$ , car la vitesse de rotation en RP va vérifier

$$0 = -f\Omega + \Phi_0 I_R$$

Cela montre que la vitesse de rotation est bien proportionnelle en RP au courant dans le rotor, donc à la tension  $V_{MCC}$  qui est imposée au rotor.

**Q 13** Premier cas peu intéressant, le diviseur de tension consommant une puissance importante car dissipée dans les deux résistances  $R_1$  et  $R_2$ .

**Q13.** Si l'impédance de la MCC est grande devant  $R_2$ , on peut considérer que tout le courant traversant  $R_1$  traverse  $R_2$  et on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$V_{MCC} = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

**Q 14** Ce 2e cas est inhabituel et intéressant. Notez bien que c'est le cas également avec deux bobines en série comme dans l'auto-transformateur (vert) que l'on a déjà utilisé en TP et qui permettait donc d'avoir une tension sinusoïdale comprise entre 0 et 230 V sans pertes (les résistances des bobinages étant quasi nulles)

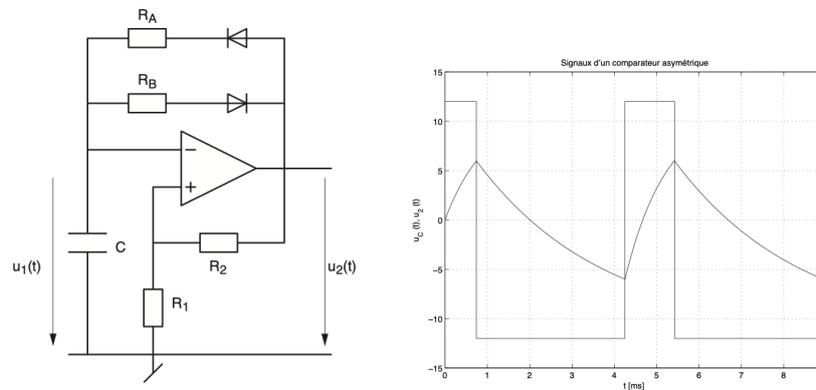
**Q14.** On applique de même un pont diviseur de tension pour les grandeurs complexes et une excitation sinusoïdale en entrée :

$$V_{MCC} = \frac{1}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} U_0 \Rightarrow \boxed{V_{MCC} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0}$$

Le résultat étant indépendant de la fréquence, il peut s'appliquer pour des très basses fréquences et donc en régime continu.

**Q 15** On a ici le principe de la tension délivrée par un bloc hacheur sans lissage, mais avec un montage à ALI de type comparateur pour le simuler : on obtient un créneau dissymétrique de valeur moyenne non nulle (si  $\alpha = \frac{1}{2}$ , la valeur moyenne est nulle)

RÉVISIONS . Remarquez sur le montage ci-dessous les deux diodes qui permettent de ne pas avoir le même temps caractéristique pour la charge et la décharge du condensateur ( $R_{AC}$  puis  $R_{BC}$ , puisque le courant change de sens ) donc elles permettent de changer les durées de  $u_2$  à  $\pm V_{sat}$



Pour la question posée ici :

$$\text{Q15. } V_{moy} = \frac{V_{sat} \times \alpha T + -V_{sat} \times (1 - \alpha)T}{T} \Rightarrow \boxed{V_{moy} = V_{sat} \times (2\alpha - 1)}$$

C'est le calcul de la valeur moyenne  $\frac{1}{T} \int_0^T U_{MCC} dt$  qui utilise donc les deux aires rectangulaires.

**Q 16** Très intéressant : on passe en revue les soucis liés aux différentes propositions. La conclusion est que le montage à bloc hacheur sera le seul intéressant.

**Q16.** Avantages et inconvénients des différents dispositifs :

- *pont résistif* : crée le bon rapport de tension mais **forte dissipation d'énergie**, si l'essentiel de l'intensité délivrée par le générateur passe dans la résistance  $R_2$  et non dans la MCC, **l'essentiel de l'énergie est dissipée par effet Joule!**
- *pont capacitif* : une fois le **régime permanent** atteint, le premier condensateur se comporte comme un circuit ouvert et **la MCC n'est plus alimentée en courant.**
- *montage ALI* : le réglage de  $\alpha$  permet de choisir le niveau de tension mais l'ALI est un composant de **l'électronique de signal** et ne peut délivrer une puissance supérieure à 0,2 W, **pas assez de puissance pour alimenter la MCC!**

En conclusion, aucune de ces méthodes n'est applicable pour transférer efficacement une puissance réglable d'où l'intérêt du hacheur.

**Q 17**

**Q17.** **ALI 1** : régime linéaire possible (rétroaction sur la borne inverseuse) ; **ALI 2** : régime de saturation (pas de rétroaction sur la borne inverseuse).

**Q 18** La méthode de la loi des noeuds en terme de potentiel est classique : attention à ne pas citer de théorème de Millman

**Q18.** On applique une loi des nœuds en terme de potentiel à l'entrée inverseuse de l'ALI 1 :

$$\frac{v_B - v_-}{R_3} = jC\omega (v_- - v_A)$$

Pour cet ALI idéal dans l'hypothèse d'un fonctionnement linéaire :  $v_- = v_+ = 0$  (borne positive reliée à la masse). On en déduit :

$$\boxed{v_B = -j\omega R_3 C v_A} \Rightarrow v_B(t) = -R_3 C \frac{dv_A}{dt}$$

Le montage fonctionne en **intégrateur**.

**Q 19**

On a ici un comparateur à hysteresis non inverseur comme vu dans le cours

**Q19.** L'ALI fonctionne en régime de saturation, le dispositif constitue un **comparateur à hystérésis**. Posons  $V_\ell = \frac{V_{sat} R_4}{R_5}$ .

L'application de la loi des nœuds en terme de potentiel au niveau de la borne non inverseuse de l'ALI 2 conduit à :

$$\frac{v_A - v_+}{R_4} = \frac{v_+ - v_B}{R_5} \Leftrightarrow v_+ = \frac{R_5 v_A + R_4 v_B}{R_4 + R_5}$$

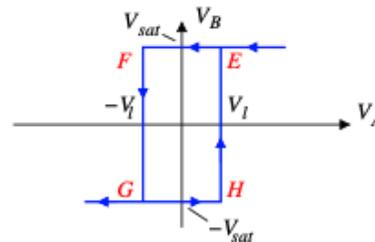
$v_B(t) = V_{sat}$  à condition que  $v_+ > v_- = 0$  c'est à dire :

$$\boxed{v_B = +V_{sat} \text{ à condition que } v_A > -\frac{R_4 V_{sat}}{R_5} = -V_\ell}$$

$v_B(t) = -V_{sat}$  à condition que  $v_+ < v_- = 0$  c'est à dire :

$$\boxed{v_B = -V_{sat} \text{ à condition que } v_A < +\frac{R_4 V_{sat}}{R_5} = +V_\ell}$$

Ce qui donne pour le cycle d'hystérésis :



**Q 20**

Vu dans le cours : oscillateur à relaxation non compacté : on a donc une tension  $V_A$  triangulaire

**Q20.** Considérons que l'ALI 2 vient de basculer à  $v_B = +V_{sat}$  en sortie et que l'on se trouve au point  $E$  du cycle.

D'après la question Q18,  $v_A$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dv_A(t)}{dt} = -\frac{V_{sat}}{R_3 C} \Leftrightarrow v_A(t) = -\frac{V_{sat}}{R_3 C} t + cste$$

Compte tenu de la condition initiale, il vient :

$$v_A(t) = -\frac{V_{sat}}{R_3 C} t + \frac{V_{sat} R_4}{R_5}$$

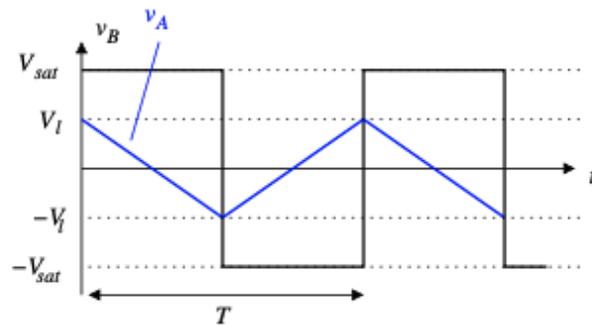
Cette expression est valable tant que  $v_A(t) > -V_\ell$  (point  $F$  du cycle), c'est à dire jusqu'à  $t_1$  tel que :

$$-\frac{V_{sat}}{R_3 C} t_1 + \frac{V_{sat} R_4}{R_5} = -\frac{V_{sat} R_4}{R_5} \Rightarrow t_1 = 2R_3 C \times \frac{R_4}{R_5}$$

La sortie de l'ALI 2 bascule alors à  $-V_{sat}$  tandis que  $v_A$  est continue (tension aux bornes d'un condensateur). On décrit alors la portion  $GH$  du cycle de même durée que la portion  $EF$ .

En conclusion,  $v_A$  est une tension triangle centrée d'amplitude  $V_\ell$  et  $V_B$  une tension créneau d'amplitude  $V_{sat}$  toutes deux de période  $\boxed{T = 4R_3 C \times \frac{R_4}{R_5}}$ .

L'augmentation de  $R_3$  augmente la période des signaux mais ne modifie pas leur amplitude.

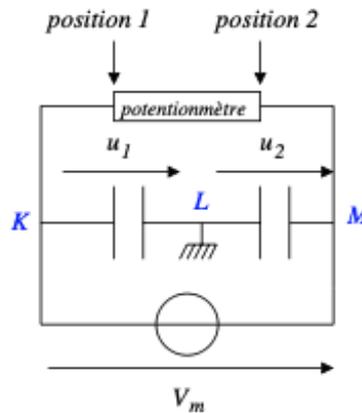


**Q 21** C'est ici le comparateur qui va permettre de rendre le créneau non symétrique avec la création d'un rapport cyclique  $\alpha$

**Q21.** La tension  $V_m$  se partage sur les deux condensateurs. Les deux condensateurs étant identiques, on a nécessairement un partage équitable avec  $u_1 = u_2 = V_m/2$ ; compte tenu que le point  $L$  est à la masse (potentiel nul), on en déduit  $v_K = -V_m/2$  et  $v_L = V_m/2$  (cf. figure ci-contre).

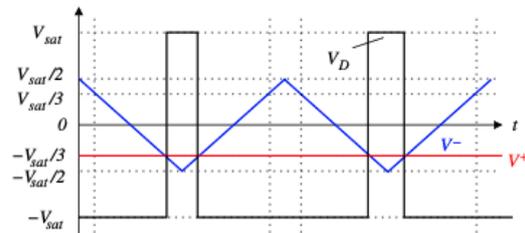
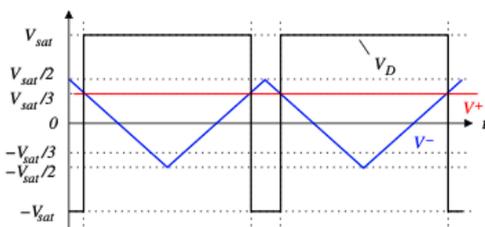
À la position extrême 1, la borne + correspond au point  $K$  et  $V^+ = \beta V_m = -V_m/2$ ; à la position extrême 2, la borne + correspond au point  $M$  et  $V^+ = \beta V_m = V_m/2$ .

On en déduit que  $\beta \in [-1/2, 1/2]$ .



La résistance d'entrée infinie de l'ALI assure que le branchement du point  $C$  sur le point  $A$  ne modifie pas l'état électrique du point  $A$  (le résultat de la question Q20 reste valable).  
L'ALI 3 fonctionne en **comparateur simple** :

- si  $V^+ > V^- \Rightarrow V_D = +V_{sat}$  ;
- si  $V^+ < V^- \Rightarrow V_D = -V_{sat}$ .

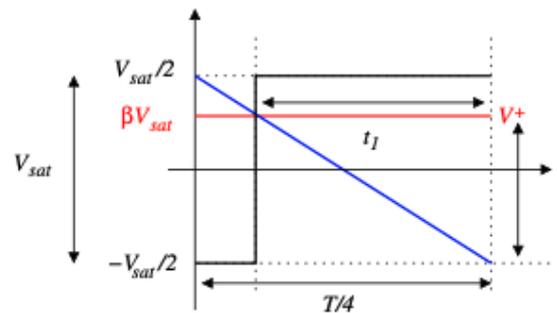


**Q 22**

**Q22.** La période de la commande est égale à la période des signaux  $v_A$  et  $v_B$  en conséquence (avec  $R_5 = 2R_4$ ) :

$$f_h = \frac{1}{2R_3C}$$

Pour déterminer le rapport cyclique, on peut se concentrer sur le premier quart de période.



$t_1$  est la durée pendant laquelle le signal de sortie est en saturation haute durant ce quart de période. Le théorème de Thalès conduit à :

$$\frac{t_1}{\beta V_{sat} + V_{sat}/2} = \frac{T/4}{V_{sat}} \Rightarrow \frac{t_1}{T/4} = \beta + \frac{1}{2}$$

Ce rapport est bien la proportion du temps passé en saturation haute, c'est le rapport cyclique  $\alpha = \beta + 1/2$ .

**Q 31** Voilà le style de problème ouvert où il faut faire appel au cours sans que des questions explicites y fassent appel. Ici on fait appel à un bilan de puissance.

**Q31. Première situation (les deux rames pleines) :** le travail moteur du poids de la rame qui descend compense le travail résistant du poids de la rame qui monte. Pour des rames se déplaçant à vitesse constante, on peut donc considérer que la puissance électrique fournie vient compenser la puissance dissipée par les frottements et les pertes.

Par la suite on considérera que cette puissance de pertes ne dépend pas du remplissage des rames  $P_{pertes} = 4,0 \text{ kW}$ .

**Seconde situation (rame qui descend à moitié remplie) :** la présence d'une rame descendante à moitié remplie et d'une rame qui monte remplie revient à considérer la montée d'une demi-rame. En plus de la puissance de pertes, la puissance électrique doit permettre la montée d'une demi-rame au rythme indiqué par le débit de passagers.

Il faut compenser la puissance résistante du poids d'une demi-rame qui s'élève sur une hauteur  $h$  en transportant  $D/2$  passagers par heure (demi-rame), chaque passager ayant une masse moyenne  $m = 70 \text{ kg}$ , ce qui correspond, en valeur absolue, à une puissance :

$$P_{poids} = mgh \times \frac{D}{2}$$

C'est à dire pour la nouvelle puissance :

$$P' = mgh \times \frac{D}{2} + P_{pertes}$$

$$\text{A.N. : } P' = 70 \times 9,81 \times 250 \times \frac{750}{3600} + 4,0 \times 10^3 \Rightarrow P' \approx 40 \text{ kW}$$

**Q 32** Voilà ici encore le style de problème ouvert . Ici on fait appel aux notions de hacheurs de nature différente : dans le cas cité, on peut récupérer de l'énergie électrique à cause de l'énergie potentielle récupérée entre les 2 rames. On est bien en limite de programme mais je vous ai proposé des pistes dans le cours. Il faut ici un hacheur réversible en courant pour permettre de laisser de l'énergie produite par le moteur (fonctionnement en génératrice) de revenir au générateur (batterie rechargeable) donc un modèle à deux blocs interrupteur + diode comme on l'a vu.

**Q32.** Comme on l'a vu à la question précédente, la puissance électrique doit être ajustée en fonction du remplissage des rames, c'est l'intérêt du hacheur série qui peut régler la puissance transmise au MCC en jouant sur le rapport cyclique.

Le hacheur série présenté est un hacheur un quadrant qui n'est réversible ni en courant ni en tension et ne permet le transfert de puissance que de la source vers la charge. Pour récupérer l'énergie lorsque la rame qui descend est plus chargée, il faudrait disposer

d'un hacheur réversible en puissance. La connaissance des différents architectures des hacheurs n'étant pas au programme il est difficile de proposer une réponse plus détaillée.