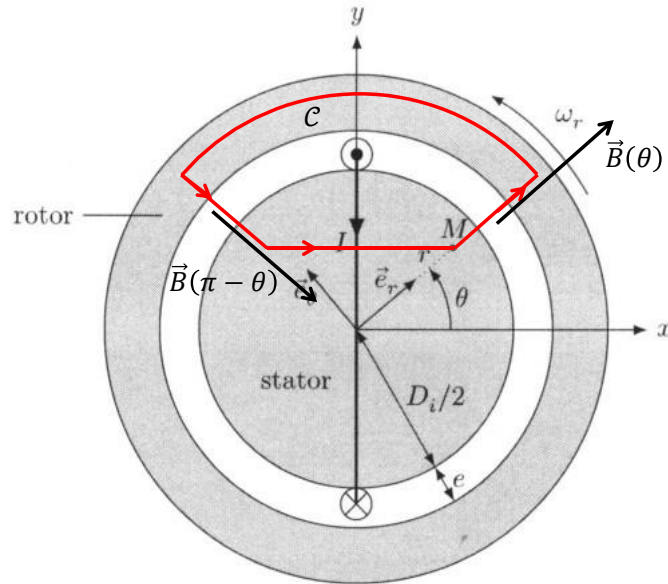


## — corrigé de la partie moteurs —

## III. Générateur

**Q17** On applique le théorème d'Ampère au contour  $\mathcal{C}$  représenté ci-dessous :



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \frac{B_0}{\mu_0} e \times 2 + 0 + 0 = I$$

soit :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2e}$$

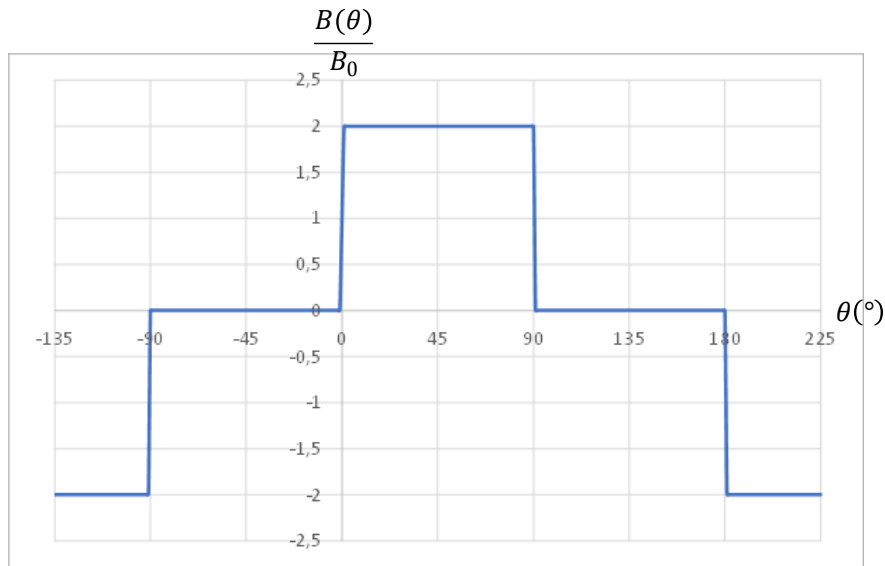
On en déduit (cf schéma ci-dessus) le champ créé par cette spire :

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r & \text{pour } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \\ \vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r & \text{pour } \theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \end{cases}$$

**Q18** On obtient de la même façon le champ créé par cette seconde spire de normale  $\vec{e}_y$  :

$$\begin{cases} \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r & \text{pour } \theta \in ]0, \pi[ \\ \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2e} \vec{e}_r & \text{pour } \theta \in ]\pi, 2\pi[ \end{cases}$$

On en déduit l'allure du champ total  $B(\theta) = \vec{B} \cdot \vec{e}_r$  :



Le champ magnétique créé par ces deux spires est donc maximal dans la direction  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**Q19** La puissance étant constante, on est en continu strict. Donc  $\mathcal{P} = UI$ . Par conséquent :

$$I = \frac{\mathcal{P}}{U} = 21,7 \text{ A}$$

On en déduit :

$$B_0 = N \frac{\mu_0 I}{2e} = 0,14 \text{ T}$$

**Q20** La direction du maximum du champ magnétique  $\vec{B}_{s1}$  est  $\theta = 0$  tandis que la direction du maximum du champ magnétique  $\vec{B}_{s2}$  est  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Il suffit donc de réaliser un enroulement identique au premier qui est enroulé autour de la direction  $\theta = 0$  c'est-à-dire  $\vec{e}_x$ , mais de l'enrouler autour de la direction  $\theta = \frac{\pi}{2}$  c'est-à-dire  $\vec{e}_y$ .

**Q21** Le champ statorique total est donné par :

$$\vec{B}_s = \frac{\mu_0 N I_s}{2e} \left( \cos(\omega_s t) \cos \theta + \cos(\omega_s t - \phi_2) \cos \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \vec{e}_r$$

Ce champ peut se récrire sous la forme

$$\begin{aligned} \vec{B}_s = \frac{\mu_0 N I_s}{4e} & \left( \cos(\omega_s t - \theta) + \cos(\omega_s t + \theta) + \cos \left( \omega_s t - \phi_2 - \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + \cos \left( \omega_s t - \phi_2 + \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \vec{B}_s = \frac{\mu_0 N I_s}{4e} & \left( \cos(\omega_s t - \theta) + \cos(\omega_s t + \theta) + \cos \left( \omega_s t - \phi_2 - \theta + \frac{\pi}{2} \right) \right. \\ & \left. + \cos \left( \omega_s t - \phi_2 + \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

Il faut donc que  $\begin{cases} \cos(\omega_s t - \phi_2 - \theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega_s t - \theta) \\ \cos(\omega_s t - \phi_2 + \theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\omega_s t + \theta) \end{cases}$ . On doit donc choisir :

$$\phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Dans ce cas,

$$\vec{B}_s = \frac{\mu_0 N I_s}{2e} \cos(\omega_s t - \theta) \vec{e}_r = B_t \cos(\omega_s t - \theta) \vec{e}_r = B_t \cos(\theta - \phi_s) \vec{e}_r$$

**Q22** L'énergie magnétique totale stockée dans l'entrefer est donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2}{2\mu_0} dV = \frac{e D_i L_r}{4\mu_0} \int_0^{2\pi} (\vec{B}_s + \vec{B}_r)^2 d\theta$$

Cette énergie est la somme de trois termes :

- $\frac{e D_i L_r}{4\mu_0} B_t^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta - \phi_s) d\theta = \frac{e D_i L_r}{8\mu_0} B_t^2 \left( 2\pi + [\sin(2(\theta - \phi_s))]_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi e D_i L_r}{4\mu_0} B_t^2$
- $\frac{e D_i L_r}{4\mu_0} B_r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta - \phi_r) d\theta = \frac{e D_i L_r}{8\mu_0} B_r^2 \left( 2\pi + [\sin(2(\theta - \phi_r))]_0^{2\pi} \right) = \frac{\pi e D_i L_r}{4\mu_0} B_r^2$
- $\frac{e D_i L_r}{2\mu_0} B_t B_r \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \phi_s) \cos(\theta - \phi_r) d\theta = \frac{e D_i L_r}{4\mu_0} B_t B_r \int_0^{2\pi} [\cos(\phi_r - \phi_s) + \cos(2\theta - \phi_s - \phi_r)] d\theta$

qui vaut :

$$\frac{e D_i L_r}{2\mu_0} B_t B_r \int_0^{2\pi} \cos(\theta - \phi_s) \cos(\theta - \phi_r) d\theta = \frac{\pi e D_i L_r}{2\mu_0} B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s)$$

Au total, l'énergie magnétique s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\pi e D_i L_r}{4\mu_0} (B_t^2 + B_r^2 + 2B_t B_r \cos(\phi_r - \phi_s))$$

**Q23** Le couple subi par le rotor vaut donc :

$$\Gamma = \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{d\phi_r} = -\frac{\pi e D_i L_r}{2\mu_0} B_t B_r \sin(\phi_r - \phi_s)$$

**Q24** Comme le courant statorique a la valeur trouvée à la question Q19, on prend

$$B_t = B_0 = 0,14 \text{ T. Numériquement, on trouve : } |\Gamma|_{\text{max}} = \frac{\pi e D_i L_r}{2\mu_0} B_t B_r = 68 \text{ N.m.}$$

**Q25** Les fém sont données par la loi de Faraday :  $\begin{cases} E_1 = -\frac{d\Phi_{r \rightarrow 1}}{dt} \\ E_2 = -\frac{d\Phi_{r \rightarrow 2}}{dt} \end{cases}$ . Or,  $\Phi_{r \rightarrow 1} = K N D_i L_r B_r \cos \phi_r$

et  $\Phi_{r \rightarrow 2} = K N D_i L_r B_r \cos(\phi_r - \frac{\pi}{2}) = K N D_i L_r B_r \sin(\phi_r)$ . Comme  $\phi_r = \omega_r t + \text{constante}$ , on en déduit :

$$\begin{cases} E_1 = K N D_i L_r B_r \omega_r \sin \phi_r \\ E_2 = -K N D_i L_r B_r \omega_r \cos \phi_r \end{cases}$$

**Q26** La loi des mailles appliquées dans l'enroulement statorique (i) donne :

$$\underline{I_i} = \frac{\underline{E_i}}{R + R_u + jL\omega_r}$$

Or, les fém complexes s'écrivent :  $\begin{cases} \underline{E}_1 = -j\omega_r \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \exp(j\phi_r) \\ \underline{I}_2 = -\omega_r \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \exp(j\phi_r) \end{cases}$ . On en déduit :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = -\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \frac{j\omega_r}{R + R_u + jL\omega_r} \exp(j\phi_r) \\ \underline{I}_2 = -\frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \frac{\omega_r}{R + R_u + jL\omega_r} \exp(j\phi_r) \end{cases}$$

**Q27** Le champ magnétique statorique complexe s'écrit donc :

$$\underline{B}_t = \frac{\mu_0 N}{2e} (\underline{I}_1 \cos \theta + \underline{I}_2 \sin \theta) = -\frac{\mu_0 N}{2e} \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \frac{\omega_r}{R + R_u + jL\omega_r} (j \cos \theta + \sin \theta) \exp(j\phi_r)$$

soit :

$$\begin{aligned} \underline{B}_t &= \frac{\mu_0 N}{2e} \frac{\pi N D_i L_r B_r}{4} \frac{\omega_r}{R + R_u + jL\omega_r} \exp j \left( \phi_r - \theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\mu_0 N}{2e} \frac{\pi N D_i L_r B_r \omega_r}{4 \sqrt{(R + R_u)^2 + L^2 \omega_r^2}} \exp j \left( \phi_r - \theta - \frac{\pi}{2} - \text{atan} \left( \frac{L\omega_r}{R + R_u} \right) \right) \end{aligned}$$

En identifiant avec  $\underline{B}_t = B_s \exp j(\phi_s - \theta)$ , on en déduit :

$$\begin{cases} B_s = \frac{\pi \mu_0 N^2 D_i L_r \omega_r}{8e \sqrt{(R + R_u)^2 + L^2 \omega_r^2}} B_r \\ \phi_r - \phi_s = \frac{\pi}{2} + \text{atan} \left( \frac{L\omega_r}{R + R_u} \right) \end{cases}$$

Injectons ces expressions dans l'expression du couple trouvée à la question

$$\Gamma = -\frac{\pi e D_i L_r}{2\mu_0} \frac{\pi \mu_0 N^2 D_i L_r \omega_r}{8e \sqrt{(R + R_u)^2 + L^2 \omega_r^2}} B_r^2 \sin \left( \frac{\pi}{2} + \text{atan} \left( \frac{L\omega_r}{R + R_u} \right) \right)$$

soit :

$$\Gamma = -\frac{\pi^2 \mu_0 N^2 D_i^2 L_r^2 \omega_r}{8 \sqrt{(R + R_u)^2 + L^2 \omega_r^2}} \frac{B_r^2}{2\mu_0} \cos \left( \text{atan} \left( \frac{L\omega_r}{R + R_u} \right) \right)$$

**Q28** La puissance moyenne consommée par la résistance de charge vaut  $\mathcal{P} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R_u}$  donc :

$$R_u = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\mathcal{P}} = 10,6 \, \Omega$$

En régime permanent de rotation, le théorème du moment cinétique appliqué au rotor donne :  $0 = \Gamma_{\text{vent}} + \Gamma$ . Donc :

$$\Gamma_{\text{vent}} = \frac{\pi^2 \mu_0 N^2 D_i^2 L_r^2 \omega_r}{8 \sqrt{(R + R_u)^2 + L^2 \omega_r^2}} \frac{B_r^2}{2\mu_0} \cos \left( \text{atan} \left( \frac{L\omega_r}{R + R_u} \right) \right) = 207 \, \text{N.m}$$

**Q29** Remarquons tout d'abord que la période angulaire  $\Delta\theta$  du champ rotorique a été divisée par  $p$  :  $\Delta\theta = \frac{2\pi}{p}$ . Le rotor peut donc tourner  $p$  fois moins vite que dans le cas  $p = 1$ .

Par ailleurs, le bobinage statorique (1) d'axe  $\theta = 0$  voit le champ rotorique  $\vec{B}_r = B_r \cos(\omega_r t) \vec{e}_r$ , qui doit être inchangé puisqu'on veut conserver la même pulsation  $\omega_r$  des courants.

D'autre part,  $\cos(p\theta - \omega_r t) = \cos\left(\omega_r \left(t - \frac{p\theta}{\omega_r}\right)\right) = \cos\left(\omega_r \left(t - \frac{\theta}{\Omega_r}\right)\right)$  où  $\Omega_r = \frac{\omega_r}{p}$ . La vitesse angulaire  $\Omega_r$  du rotor est bien divisée par  $p$ .

La fréquence des courants induits au stator vaut toujours  $f = \frac{\omega_r}{2\pi} = p \frac{\Omega_r}{2\pi}$  donc :

$$\Omega_r = \frac{2\pi f}{p} = 26 \text{ rad.s}^{-1} = 250 \text{ tr. min}^{-1}$$

Pour  $p = 1$ , le rotor devait tourner à  $3000 \text{ tr. min}^{-1}$  pour obtenir la même fréquence de 50 Hz pour les courants.