Ondes de tension et de courant
Cas d'un câble coaxial

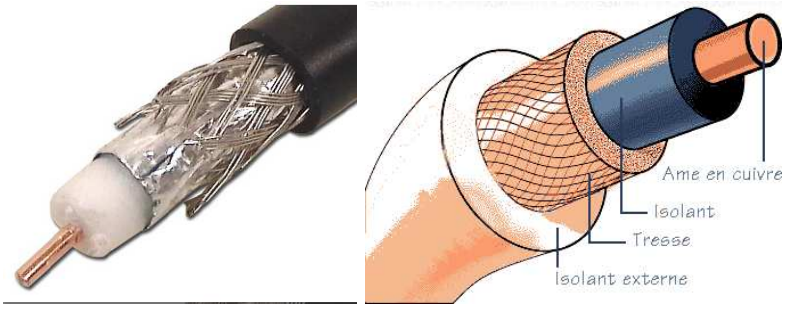
1. Rappel sur l'équation différentielle caractérisant une onde

Dans le cas des ondes mécaniques 1D, on a vu que l'équation de d'Alembert correspondait aux caractéristiques du système étudié. Nous allons voir dans ce nouveau chapitre que la description d'une onde de tension $u(x,t)$ ou de courant $i(x,t)$ donne une équation de même forme.

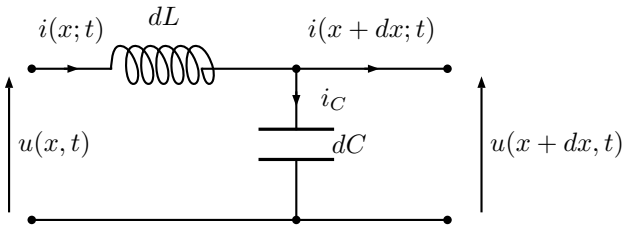
Equation de d'Alembert

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0$ avec c la célérité de l'onde, pour un paramètre descriptif $s(x,t)$, en notant x la variable spatiale d'un déplacement unidimensionnel (1D) de l'onde associée.

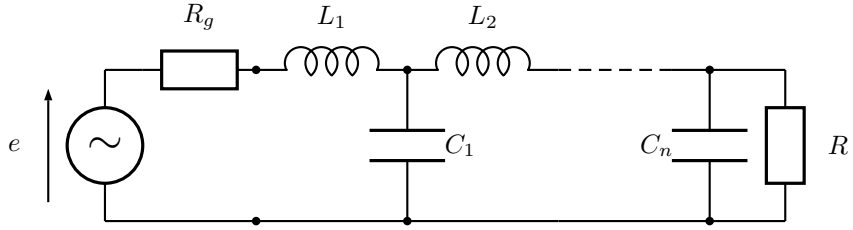
2. Description du système : ligne bifilaire et cas d'un câble coaxial



3. Modélisation électrique : cas d'un câble coaxial **sans résistance**



La ligne complète est une succession de cette cellule élémentaire $dL = \lambda.dx, dC = \gamma.dx$ de longueur dx pour toute la longueur ℓ du fil.

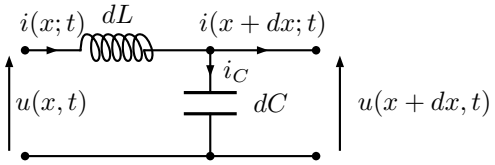


La résistance R_g est la résistance du générateur.

La résistance R est en option à la fin de la ligne et permet d'étudier la réflexion ou non des ondes en bout de ligne. C'est souvent une résistance variable en TP ou dans les exercices.

4. Existence d'une onde : équations des télégraphistes sans pertes

On utilise des variables $u(x,t)$ et $i(x,t)$ comme pour tout circuit électrique classique.



Nous allons d'ailleurs écrire les lois des noeuds et des mailles sur le schéma électrique précédent :

– on écrit la loi des **mailles** en entrée de la cellule dC, dL

On obtient en 1ère étape $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}}$

– on écrit la loi des **noeuds** avant la sortie de la cellule

On obtient en 2ème étape $\boxed{\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}}$

En utilisant ces deux résultats, on obtient l'équation de d'Alembert :

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

Une équation identique est vérifiée par $i(x,t)$

Equation de d'Alembert ou "des télégraphistes" pour les lignes bifilaires

Retenons que l'on a une équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma\lambda \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, qui est vérifiée également par $i(x,t)$.

Les solutions sont donc des ondes progressives de type $u(x,t) = U\cos(\omega t - k.x + \phi)$

La célérité de l'onde est donc $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma\lambda}}}$

La relation de dispersion est $\omega^2 = k^2 c^2$

5. Existence d'une impédance caractéristique Z_C pour le câble coaxial

Comme les deux variables électriques $u(x,t)$ et $i(x,t)$ sont solutions de l'équation d'onde, on cherche la relation entre ces deux var

En prenant n'importe laquelle des "équations intermédiaires" $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$ ou $\dfrac{\partial i}{\partial x} = -\gamma \dfrac{\partial u}{\partial t}$, avec la notation complexe pour u et i, pour un onde dans le **sens des x croissants**, on peut écrire :

On aboutit alors à une équation :

$$\boxed{u = \lambda \frac{\omega}{k}.i}$$

En utilisant la relation de dispersion, on peut simplifier la relation précédente en $u = \lambda c.i$ ce qui donne donc une relation simple :

$$u = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}$$

On obtient donc l'expression de l'impédance caractéristique du câble

$$\boxed{Z_C = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}}$$

Applications numériques : pour des valeurs choisies $\gamma \approx 100\text{nF/m}$ et $\lambda \approx 0,25\mu\text{H/m}$, on obtient $Z_C \approx 50\Omega$. Pour d'autres valeurs, on peut trouver 75Ω pour les câbles vidéo par exemple.

Impédance caractéristique Z_C d'un câble

En résumé, $Z_C = \sqrt{\dfrac{\lambda}{\gamma}}$.

Pour une onde progressive dans le sens des x croissants, $u(x,t) = U\cos(\omega t - kx)$ donne $\boxed{u = Z_C.i}$

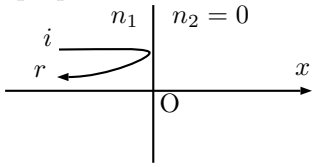
MAIS pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants, $u(x,t) = U\cos(\omega t + kx)$ donne $\boxed{u = -Z_C.i}$

La valeur 50Ω des câbles coaxiaux en TP est expliquée par le modèle.

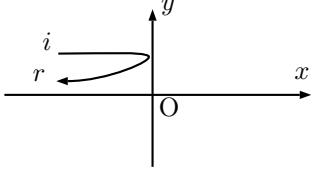
6. Interface entre deux "milieux" et conséquences

Cas d'une interface "miroir" : réflexion totale.

Cas de l'optique :

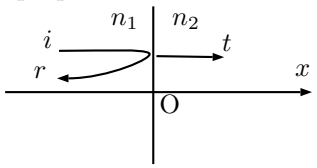


Cas d'une corde attachée :

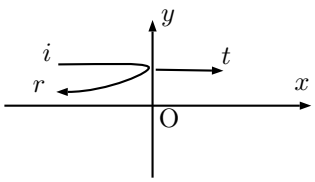


Cas d'une interface source de transmission et de réflexion

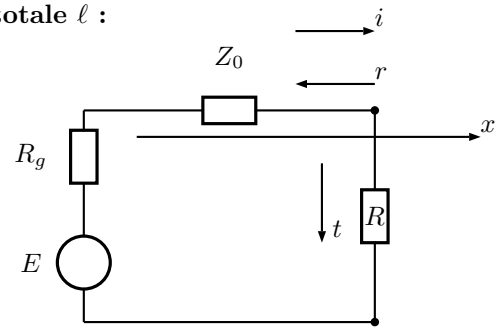
Cas de l'optique :



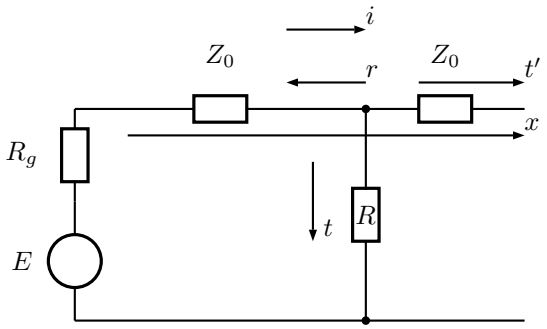
Cas de deux cordes :



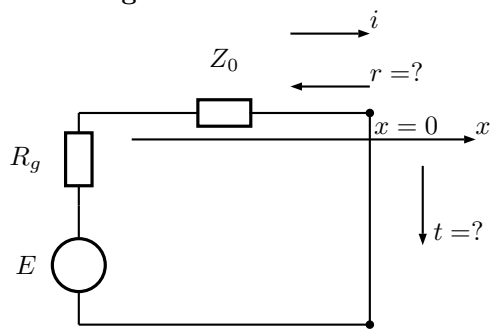
Importance des conditions aux limites :
Cas d'une ligne bifilaire de longueur totale ℓ :



Interface entre deux câbles



7. Extrémité court-circuitée d'un câble de longueur ℓ



Court-circuit : $R = 0$

La résolution passe par l'écriture des conditions aux limites de zone :
$R = 0$ implique $r \neq 0$ et $t \neq i$.
La condition aux limites en $x = 0$ est $\boxed{u(0,t) = 0}$ pour une superposition entre une onde incidente et une onde réfléchie en $x = 0^-$
Important : *l'onde incidente et d'onde réfléchie sont dans le même milieu donc $k_i = k_r$ puisque la célérité est la même.*

Résolution : détermination de $u(x,t)$ à partir des conditions aux limites
On écrit pour la zone Z_C : $u_i(0,t) + u_r(0,t) = 0$

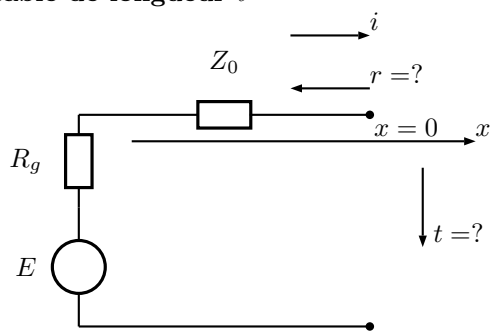
On aboutit à $\boxed{u_{r,0} = -u_{i,0}}$ et à une onde stationnaire telle que $\boxed{u(x,t) = U\sin(\omega t + \phi).\sin(k.x)}$

Détermination de $i(x,t)$ à partir d'une équation intermédiaire de d'Alembert
On part de $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda\dfrac{\partial i}{\partial t}$

On aboutit à une onde stationnaire telle que $\boxed{i(x,t) = \dfrac{U}{Z_C}\cos(\omega t + \phi).\cos(k.x)}$

REMARQUE : en $x = 0$, le courant ne vérifie pas la loi d'Ohm qui imposerait $i(0,t) = 0$ puisque $R = 0$!

8. Extrémité en circuit ouvert d'un câble de longueur ℓ



Circuit ouvert en bout de câble : $R = \infty$

La résolution passe par l'écriture des conditions aux limites de zone :
$R = \infty$ implique $r \neq 0$ et $t = 0$.
La condition aux limites en $x = 0$ est $\boxed{i(0,t) = 0}$ pour une superposition entre une onde incidente et une onde réfléchie en $x = 0^-$
Important : *l'onde incidente et d'onde réfléchie sont dans le même milieu donc $k_i = k_r$ puisque la célérité est la même.*

Résolution : détermination de $i(x,t)$ à partir des conditions aux limites

On aboutit à $\boxed{i_{r,0} = -i_{i,0}}$ et à une onde stationnaire telle que $\boxed{i(x,t) = I\sin(\omega t + \phi).\sin(k.x)}$

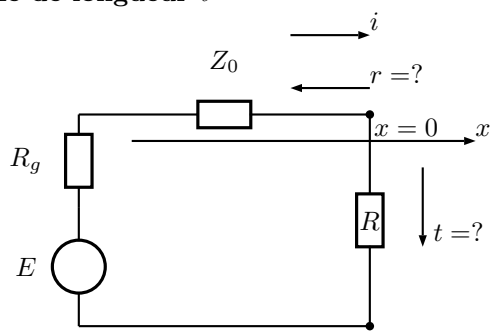
Détermination de $u(x,t)$ à partir d'une équation intermédiaire de d'Alembert

On part de $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$ par exemple.

On aboutit à une onde stationnaire telle que $\boxed{u(x,t) = U\cos(\omega t + \phi).\cos(k.x)}$

REMARQUE : en $x = 0$, le courant ne vérifie pas la loi d'Ohm qui imposerait $u(0,t) = 0$ puisque $R = \infty$ donc $i(0,t) = 0$!

9. Extrémité connectée à R d'un câble de longueur ℓ



Extrémité du câble : $R \neq 0$

La résolution passe par l'écriture des conditions aux limites de zone :
$R \neq 0$ implique $r \neq 0$ et $t \neq i$.
La condition aux limites en $x = 0$ est $\boxed{u(0,t) = R.i(0,t)}$ pour une superposition entre une onde incidente et une onde réfléchie en $x = 0^-$
Important : *l'onde incidente et d'onde réfléchie sont dans le même milieu donc $k_i = k_r$ puisque la célérité est la même.*

Résolution : conséquences sur $u(x,t)$ et $i(x,t)$ des conditions aux limites

On a, avec $u_i = Z_C.i_i$ et $u_r = -Z_C.i_r$:

$$u(x,t) = u_{i,0}e^{j(\omega t - kx)} + u_{r,0}e^{j(\omega t + kx)}$$
$$i(x,t) = \frac{u_{i,0}}{Z_C}e^{j(\omega t - kx)} + \frac{-u_{r,0}}{Z_C}e^{j(\omega t + kx)}$$

On aboutit à un coefficient de réflexion en tension $\boxed{r_u = \dfrac{u_r}{u_i} = \dfrac{R - Z_C}{R + Z_C}}$

et à un coefficient de réflexion en intensité $\boxed{r_i = \dfrac{i_r}{i_i} = -r_u = -\dfrac{R - Z_C}{R + Z_C}}$

Cas importants

– réflexion sans changement de signe de la tension : $r_u > 0$

– réflexion avec changement de signe de la tension : $r_u < 0$

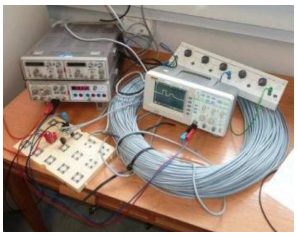
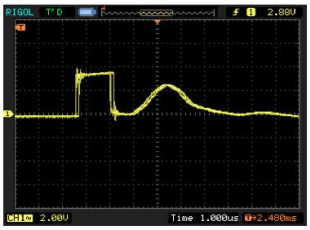
– absence de réflexion : $r_u = 0$ ce qui signifie **adaptation d'impédance** avec $\boxed{R = Z_C}$

Cela signifie que toute l'onde émise par la source est absorbée par la résistance R.

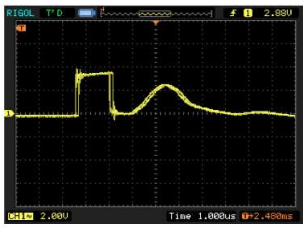
10. Observations expérimentales

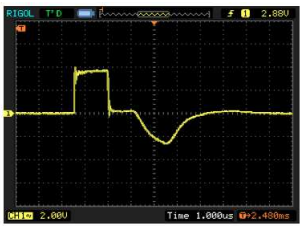
10. 1 Mesure de la célérité v_ϕ de propagation de l'onde électrique dans le câble

On suit à l'oscilloscope la tension à l'entrée du câble en circuit ouvert.

10. 2 Observation des cas étudiés précédemment



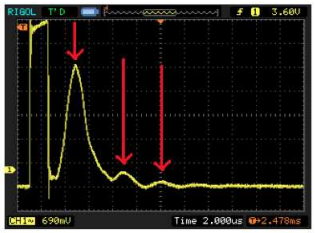


10. 3 Mesure de l'impédance caractéristique du câble

10. 4 Ondes stationnaires

On peut montrer que l'extrémité du câble reliée au G.B.F et à l'oscilloscope sera un noeud de l'onde de tension si $\ell = (2p+1)\dfrac{v_\phi}{4f}$ où p est un entier, ℓ la longueur du câble, v_ϕ la vitesse de phase de l'onde et f sa fréquence.

10. 5 Cas des réflexions au niveau du générateur



10. 6 Amortissement

$u(t) = u_{i,0}cos(\omega t) + u_{i,0}e^{\frac{-2L}{\delta}}\cos(\omega(t-2L/c))$