Ondes : équations de d'Alembert

1. Généralités, rappels de Première Année

Rappelons ici les définitions générales : un milieu est nécessaire pour les ondes mécaniques au contraire des ondes électromagnétiques (vues plus loin).

Une "onde" est un paramètre qui se propage, une déformation dont la position varie au cours du temps : une **onde** est une propagation d'information dans l'espace et le temps sans déplacement, en moyenne, de matière.

On appelle **signal** toute grandeur physique qui varie au cours du passage d'une onde.

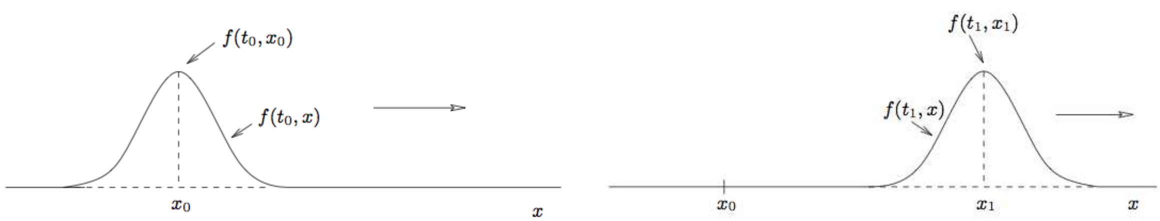
La **vitesse** de propagation d'une onde (à ne pas confondre avec la vitesse de déplacement des constituants du milieu matériel lorsqu'il y en a un) est appelé célérité.

- les ondes **mécaniques**, qui ont besoin d'un support matériel pour se propager. Parmi ces ondes, on peut citer les ondes acoustiques, les ondes sismiques, les vagues, les ondes qui se propagent à la surface d'une corde, de la peau d'un tambour, etc...

- les ondes **électromagnétiques** qui correspondent à la propagation d'un champ électromagnétique dans l'espace. Ces ondes EM sont elles-même réparties en différents domaines, suivant leur fréquence : lumière visible, ultraviolets, infrarouges, ondes radio, rayons X en sont différents exemples. Contrairement aux ondes mécaniques, une onde électromagnétique n'a pas besoin d'un support matériel pour se propager.

> Dans un problème à une dimension, cette déformation se propage à la célérité c suivant un axe Ox si s est une fonction de la variable $t - \frac{x}{c}$ où c est la célérité de l'onde.

Notation de la déformation : le signe de l'expression $t \pm \frac{x}{c}$ traduit le sens de propagation. Le signe $\ominus$ correspond à une propagation dans le sens des x croissant alors que le signe $\oplus$ correspond au sens contraire.



Une onde progressive harmonique est une onde progressive dont la fonction f (ou g, selon le sens de propagation) est sinusoïdale :

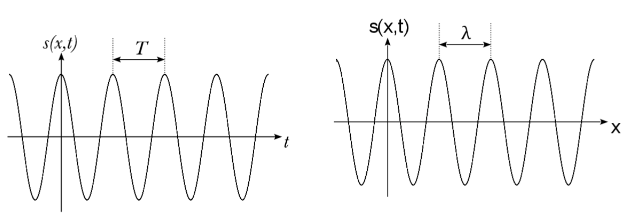
$$\begin{cases} s(x,t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t - \dfrac{x}{c}\right) + \varphi\right) & \text{(vers les } x \text{ croissants)} \\ s(x,t) = S_0 \cos\left(\omega\left(t + \dfrac{x}{c}\right) + \varphi\right) & \text{(vers les } x \text{ décroissants)} \end{cases}$$

Cette fonction présente une périodicité par rapport à la variable t : en un point d'abscisse x, l'onde varie sinusoïdalement dans le temps, avec une période $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

De même, on peut alors définir une périodicité du signal selon x que l'on nomme période spatiale λ : elle est aussi appelée **"longueur d'onde"**.

> La ***longueur d'onde*** est définie comme la période spatiale d'une onde progressive harmonique, c'est-à-dire la distance qui sépare deux extréma lorsqu'on regarde la forme spatiale de l'onde à une date t donnée. Elle vérifie :

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi c}{\omega}}$$



Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire dirigé dans le sens de propagation d'une onde progressive harmonique. On définit le ***vecteur d'onde*** associé à cette onde progressive de la manière suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u} \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \text{ dans le cas d'un milieu linéaire}}$$

k représente la pulsation spatiale de l'onde progressive harmonique.
Autant T est la période temporelle $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, on a λ la période spatiale $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

Avec le **nombre d'onde,** on peut réécrire sous une forme différente l'expression d'une onde **progressive harmonique** :

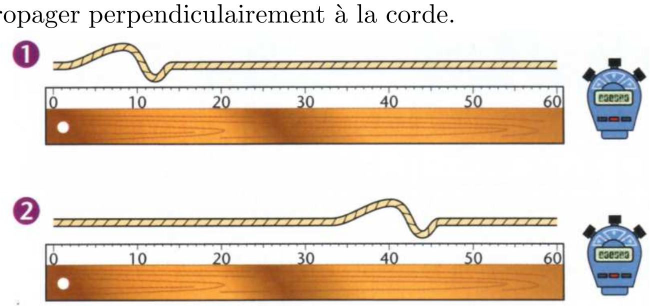
$$\boxed{\begin{cases} s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) & \text{(vers les } x \text{ croissants)} \\ s(x,t) = S_0 \cos(\omega t + kx + \varphi) & \text{(vers les } x \text{ décroissants)} \end{cases}}$$

Remarquons que l'on pourra définir une relation entre T et λ, comme par exemple $\lambda = cT$ quand $\omega = kc$ (cette dernière relation est la "relation de DISPERSION" correspondant au milieu et au système.

Notion de transversalité : l'onde est transversale si la déformation du milieu se fait perpendiculairement à la direction de propagation :

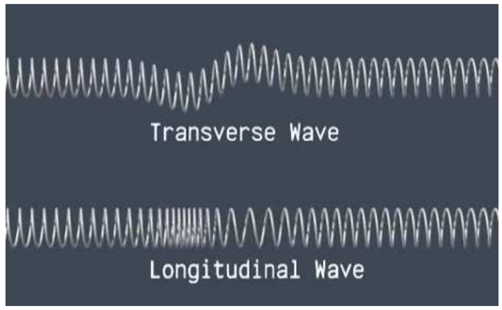
- Dans le cas des ondes à la surface de l'eau, s correspond au déplacement vertical des molécules d'eau. On peut facilement s'en convaincre en observant le mouvement d'un bouchon qui flotte sur l'eau.

- Une élongation **transversale** s (noté souvent $y(x,t)$) d'une **corde** se propage le long de cette corde. Il suffit de tendre une corde et de donner une impulsion ascendante puis descendante à son extrémité pour voir la déformation se propager perpendiculairement à la corde.

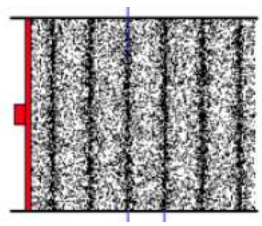


- Pour les ondes **électromagnétiques**, la déformation est représentée par une grandeur **vectorielle** s qui correspond aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Dans le vide $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation.

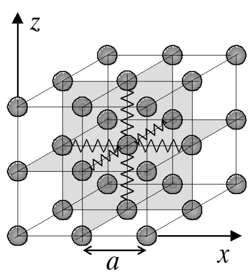
L'onde est **longitudinale** si la déformation du milieu se fait dans la direction de propagation :

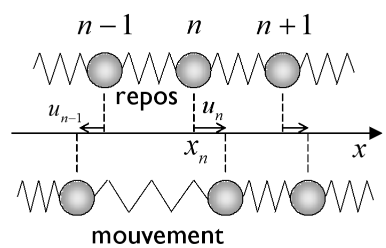


– Dans les fluides, s correspond aux déplacements longitudinaux des molécules et à la surpression associée, source des ondes sonores.



– Pour les ondes sonores dans les solides, le déplacement longitudinal s des atomes est représenté par une chaîne d'oscillateurs vibrant dans la direction de propagation.
On modélise les interactions électrostatiques entre atomes d'un édifice cristallin par des forces de "rappel" de type "ressort". Le système peut être schématisé comme suit (on note x_n les positions au repos et u_n les déplacements par rapport à l'équilibre dus au passage de l'onde) :





– Il existe également un modèle électrique de la propagation du courant dans une ligne bifilaire. L'intensité du courant s'identifie à s.

2. Caractéristique d'une onde

Une onde peut être représentée par un paramètre physique s variable qui peut être un scalaire, un vecteur ou un tenseur (matrice). Pour traduire l'évolution à la fois spatial et temporelle de l'onde, il apparait que le paramètre s est la solution d'une équation différentielle portant à la fois sur les corrdonnées spatiales et du le temps t. La différence par rapport à l'équation différentielle qu'est le PFD étudié en mécanique jusque là est que la solution est valable pour un seul point mais pas tout l'espace (la masse ponctuelle au bout du ressort par exemple)

Intérêt de l'étude d'une onde harmonique :

En général, une onde n'est pas harmonique mais a une forme quelconque. Cependant, on peut ramener l'étude de n'importe quel signal à celui d'une somme de signaux harmoniques. Cette propriété, connue sous le nom de décomposition en série de Fourier, a une importance capitale car elle mathématiquement simple et conceptuellement très riche.

Toute fonction périodique $s(t)$ de fréquence f peut s'écrire sous la forme d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales de fréquences proportionnelles à f (appelée ***série de Fourier***) :

$$\boxed{s(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n f t + \varphi_n\right)}$$

a_0 est appelée la ***composante continue***. Elle est égale à la valeur moyenne de la fonction $s(t)$.

Le premier terme de la somme s'appelle le ***fondamental***. Sa fréquence vaut f et sa pulsation ω.

Tous les autres termes s'appellent les ***harmoniques***. L'harmonique de rang n a une fréquence égale à nf. Ainsi, les termes de la série de Fourier ont tous des fréquences égales à des multiples entiers de la fréquence fondamentale : f, $2f$, $3f$, ... donc les pulsations sont égales à ω, 2ω, 3ω, ...

Les coefficients a_n sont réels et sont caractéristiques de la fonction $s(t)$. Pour une fonction périodique $s(t)$ donnée, il existe une unique décomposition en série de Fourier.

La réciproque est vraie également. Une somme de fonctions sinusoïdales de fréquences proportionnelles à f est périodique de fréquence f. Pour un jeu de coefficient a_i donnés, il existe une unique fonction périodique $s(t)$ associée.

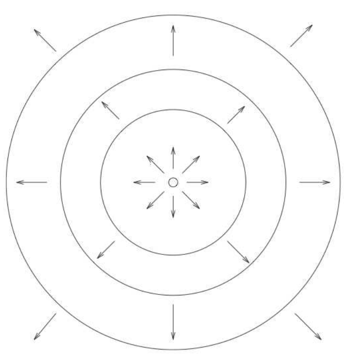
Surface d'onde : c'est le lieu des points où la fonction $s(t, x, y, z)$ (l'amplitude le plus souvent) est la même à l'instant t.

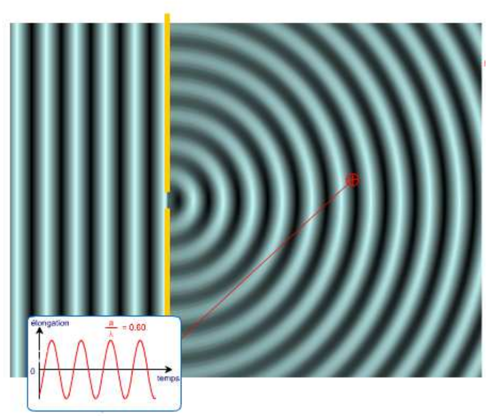
Physiquement, la surface d'onde est la surface passant par tous les points atteints par l'onde à l'instant t. Au cours du temps, la surface d'onde $s(t)$ se propage, et peut même se déformer si le milieu correspondant est inhomogène.

EXEMPLE :

Un exemple simple d'une surface d'onde est donné par la chute d'un objet ponctuel dans un bassin d'eau et l'apparition d'ondes circulaires concentriques à la surface de l'eau et s'éloignant du point de chute. Ici, le problème spatial est **bidimensionnel**; la fonction s, qui représente la hauteur de la vague provoquée par la chute de l'objet relativement au niveau d' équilibre du plan d'eau, dépend des variables t, x et y : $s = s(t, x, y)$. Sur chaque cercle de vagues la hauteur est la même, ce qui signifie que s dépend de x et de y à travers le rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$: $s = s(t, \sqrt{x^2 + y^2})$, l'origine des coordonnées étant choisie au point de chute de l'objet, c'est-à-dire au centre des cercles. La surface d'onde est en fait ici un cercle et l'onde est circulaire.

On aura souvent à s'intéresser au cas d'un **"plan d'onde"**.





3. Vocabulaire des différents types d'onde

3. 1 **onde harmonique** : l'amplitude de l'onde s'écrira sous une forme sinusoïdale comme $s(x,t) = S\cos(\omega t - kx)$. La notation complexe est alors classique et on écrira par exemple ici $\underline{s} = S.e^{j(\omega t - kx)}$.

3. 2 **onde longitudinale ou transversale** : on a dit que cela correspondait à la direction de la vibration (de la variation du paramètre) par rapport à la direction de propagation de l'onde.

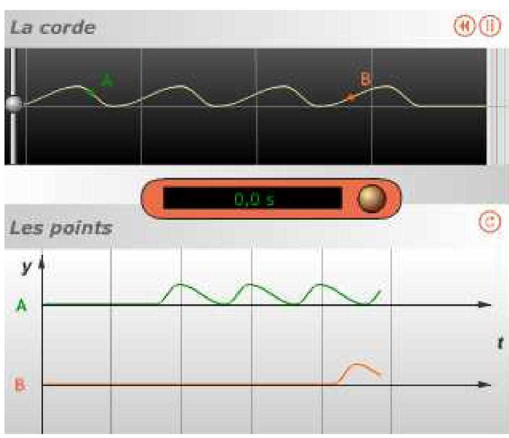
3. 3 **onde plane** : une onde d'amplitude s est plane si elle ne dépend que d'une variable d'espace, x par exemple, et du temps$t$. On la note $s = s(x,t)$. A un instant donné, s a la même valeur dans tous les points d'un plan perpendiculaire à l'axe Ox, appelé plan d'onde.

L'intérêt des ondes planes réside dans la simplicité de l'équation différentielle associée qui ne comportera alors que des dérivées en x et en t.

3. 4 **nombre d'onde** c'est le paramètre k qui apparait dans l'expression de l'amplitude.

3. 5 **onde polarisée** : une représentation vectorielle possède la possibilité d'avoir l'amplitude $\vec{s}$ dont la direction peut être remarquable. Si la direction est fixe, on parle de polarisation rectiligne. Si la direction tourne régulièrement en même temps que l'onde avance, tout en gardant l'amplitude de norme constante, on parle de polarisation circulaire. Si l'amplitude varie périodiquement entre deux valeurs ($s_x = A\cos(\omega t - kx)$ et $s_y = B\sin(\omega t - kx)$), on parle de polarisation elliptique. Ces cas seront développés dans le cours sur les ondes électromagnétiques

4. Cas de la CORDE VIBRANTE : forme de l'équation de d'Alembert



L'équation générale sera du type $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

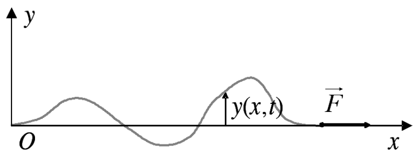
On peut adopter une résolution générale par changement de variables $X = t - \frac{x}{V}$ et $Y = t + \frac{x}{V}$. Dans ce cas, on aboutit à $\frac{\partial^2 s}{\partial X \partial Y} = 0$ dont la solution est $s(t) = f(X) + g(Y) = f(t - \frac{x}{V}) + g(t + \frac{x}{V})$, somme de deux solutions progressives de sens opposés.

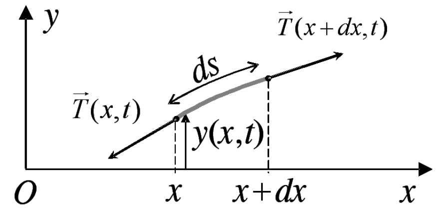
4. 1 **Etude mécanique de la corde**

Assimilons une corde à une distribution linéique de matière λ, ce qui signifie que l'on ne prend pas en compte son épaisseur. On note L sa longueur et λ sa masse linéique. Elle est tendue suivant l'axe des x par une force d'intensité F suffisante pour admettre qu'elle est rectiligne au repos, malgré son poids (qui a pour effet de l'incurver comme par exemple quand on regarde des cables électriques attachés aux pylones). Par exemple, l'extrémité A est fixée à un support fixe et un opérateur exerce la force constante F sur l'extrémité B.

Cherchons l'équation du mouvement des différents points de la corde au voisinage de sa position d'équilibre. On se limite à un mouvement plan et on introduit le déplacement transversal $y(x,t)$.

Au cours des calculs, nous nous placerons **dans l'approximation des petits mouvements**, pour laquelle les déformations transversales de la corde sont très petites par rapport à la longueur à l'équilibre de la corde tendue.





On applique le théorème du centre d'inertie au petit élément de longueur ds et de masse élémentaire $dm = \lambda ds = \lambda\sqrt{dx^2 + dy^2} \approx \lambda dx$:

$\lambda ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \lambda ds\vec{g} + \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t) = \lambda ds\vec{g} + \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}dx$ en remarquant **que l'on néglige le poids** dans la suite de l'analyse, ce qui signifie que l'on obtient donc :

$$\lambda ds \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u}_y = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}dx.$$

On voit que la projection sur l'axe horizontal donne $T_x(x,t) = T_x(x+dx,t) \approx F$ ou bien, comme dans l'équation précédente $\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0$.

La projection suivant y donne $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial T_y}{\partial x} \approx \frac{1}{\lambda}\frac{\partial T_y}{\partial x}$.

On a supposé que le déplacement latéral $y(x,t)$ était faible, donc l'angle α que fait la tangente à la corde avec l'horizontale est faible lui aussi : $\tan\alpha = \frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{T_y}{F} \approx \alpha \ll 1$.

On a donc $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial T_y}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{F}{\lambda}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Equation d'onde de d'Alembert pour une corde vibrante

$$\boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{F}{\lambda}}$$

A titre d'exemple, si la tension de la corde est $F = 50$N (ce qui équivaut approximativement à la force exercée par le poids d'une masse de 5 kg) et sa masse linéique $\lambda = 50$g/m, on trouve $c = 31,7$m/s.

4. 2 Notation complexe

Cette notation permet d'exprimer plus facilement les dérivées.

4. 3 Equation de dispersion

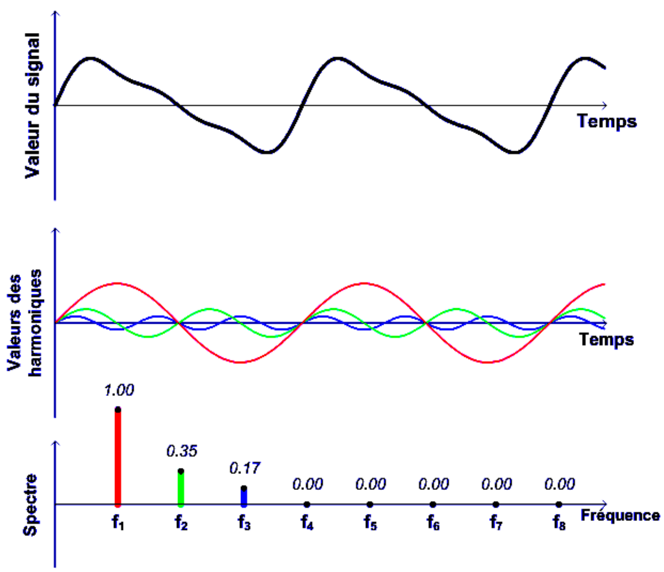
Relation de dispersion

C'est une relation entre k et ω : elle sera exprimée pour les ondes dans n'importe quel milieu.
Cela permet de connaître le comportement du milieu :

- milieu **linéaire** : relation linéaire $\omega = k.c$
- milieu non linéaire dit **"dispersif"** : $\omega = f(k)$
- milieu absorbant ou **"dissipatif"** : $k = k_1 + jk_2$ complexe

4. 4 Spectres de Fourier spatial et temporel

Si l'onde n'a pas une forme sinusoïdale, on peut la décomposer en somme de termes sinusoïdaux.



4. 5 Vitesse de phase

On peut écrire $s(x,t) = S\cos(\omega t - kx)$ sous la forme :

$$s(x,t) = S\cos(\omega t - kx) = S\cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right)\right) = S\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)\right)$$

donc $\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k}}$

5. Réflexion d'une onde

Lorsqu'une onde progressive **rencontre un obstacle, par exemple le point de jonction entre deux cordes ou l'extrémité d'une corde**, elle subit une réflexion partielle ou totale et donne naissance à une onde qui se propage en sens opposé. Les propriétés de cette onde sont déterminées en utilisant les conditions aux limites ou de raccordement au point considéré.

Réflexion d'une onde progressive sur une paroi rigide :

Lorsqu'une onde progressive incindente $s_i(x,t)$ atteint une paroi rigide d'abscisse $x = 0$, elle donne naissance à une onde ***réfléchie*** :

$$\boxed{s_r(x,t) = -s_i(-x,t)}$$

L'onde réfléchie se propage en sens opposé à l'onde incidente. A t donné, on construit l'onde réfléchie à partir de l'onde incidente par **symétrie centrale par rapport au point fixe de la paroi. L'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie.**

Fréquence de réflexion :

on suppose que la réflexion a lieu en $x = 0$ pour une onde incidente
$y_i(x,t) = Y\cos(\omega_i t + k_i x + \varphi)$
que l'on note $y_i(x,t) = Y_i e^{(\omega_i t + k_i x)}$.
L'onde réfléchie est de la forme $y_r(x,t) = Y_r e^{(\omega_r t + k_r x)}$

Chaque onde vérifie la relation de dispersion :

La condition aux limites impose $y(x,t) = 0$

A la réflexion, on a donc :
$\omega_i = \omega_r$ $\qquad k_i = k_r$ $\qquad Y_i + Y_r = 0$
Attention : ceci est vrai tant que l'obstacle est fixe. Ce sera faux avec l'effet Doppler

6. ondes stationnaires

Lorsque la longueur d'une corde est finie, une onde progressive rencontre au bout d'un certain temps de propagation l'une des extrémités de la corde et donne naissance à une onde réfléchie qui se propage en sens inverse de l'onde initiale. L'onde réfléchie, en se propageant, rencontre l'autre extrémité de la corde et est à son tour réfléchie, etc. La corde devient ainsi le siège permanent d'ondes se propageant en sens inverses. Souvent, l'onde totale qui en résulte ne reflète plus des propriétés manifestes de propagation; elle semble plutôt refléter un mouvement d'oscillation autour de la position d'équilibre de la corde. Un cas encore plus frappant apparaît lorsque l'onde paraît fixe avec tous les points de la corde oscillant avec la même pulsation ω. De telles ondes sont appelées **ondes stationnaires**, le terme stationnaire indiquant le fait que l'onde reste fixe.

Lorsque l'on superpose deux ondes de même amplitude, même pulsation mais de sens de propagation différent, on obtient :

$$A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx)$$

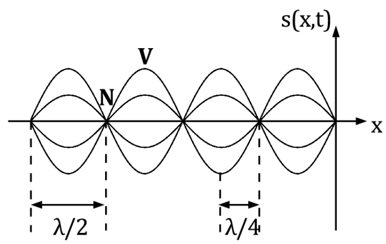
dont la simplification correspond au produit de deux fonctions sinusoïdales **"découplées"** en t et x, ce qui veut donc dire que des zéros de l'amplitudes sont présents et fixes, quelque soit t. Ces points fixes sont les **"noeuds"** de vibration.

La réflexion d'une onde progressive harmonique sur une paroi donne naissance, dans le milieu de propagation, à une ***onde stationnaire*** (OS) de la forme :

$$\boxed{s(x,t) = 2S_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \psi\right)}$$

Une onde stationnaire présente la particularité de posséder :
- des ***noeuds*** de vibration, c'est-à-dire des points de l'espace immobiles à tout instant. Deux noeuds consécutifs sont distants de $\lambda/2$.
- des ***ventres*** de vibrations, c'est-à-dire des points de l'espace qui oscillent avec une amplitude maximale (ici $2S_0$). Deux ventres consécutifs sont distants de $\lambda/2$. Un ventre et un noeud consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

Les conditions initiales **("un point fixe")** imposent : $s(x,t) = 2S_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$



7. Influence des conditions aux limites

Nous considérerons souvent (cas des instruments de musique à corde) une corde ayant **deux extrémités fixes**.

Les cas de cordes avec une ou deux extrémités "libres" se traitent de la même façon, en utilisant les conditions aux limites correspondantes :
- **Cas d'une corde avec deux extrémités fixes**
- **Corde de Melde**
- **Extrémité libre** : cas de la réflexion

8. Cas de deux extrémités fixes

8. 1 Solution

Considérons deux points fixes séparés d'une longueur ℓ : nous avons des noeuds imposés en $x = 0$ et $x = \ell$.

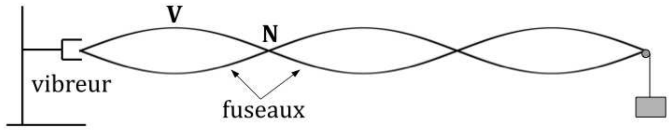
Les conditions initiales **("deux points fixes")** imposent : $s(x,t) = 2S_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

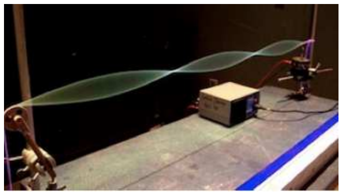
8. 2 Modes

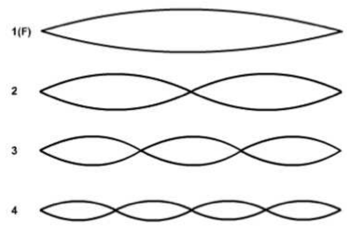
La longueur d'onde λ et la longueur ℓ du milieu vérifient :

$$\ell = N\frac{\lambda}{2}$$

9. Cas de la corde de MELDE : cas d'un régime harmonique forcé, résonance







On a : $\forall t, y(x = \ell, t) = 0$ et $y(x = 0, t) = A.\cos\omega t$

$y(x,t) = Y_i e^{(\omega_i t + k_i x)} + Y_r e^{(\omega_r t + k_r x)}$
Les conditions aux limites sont :

On obtient donc :

conclusion :

$$\boxed{\omega_i = \omega_r = \omega\,;\; y(x,t) = A\cos\omega t.\frac{\sin(k(\ell - x))}{\sin(k\ell)}}$$

10. Cas d'une extrémité mobile grâce à un "anneau"

La partie mobile est une ventre de vibration

La longueur d'onde λ et la longueur ℓ du milieu vérifient :

$$\ell = (N-1)\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

11. Instruments de musique à corde

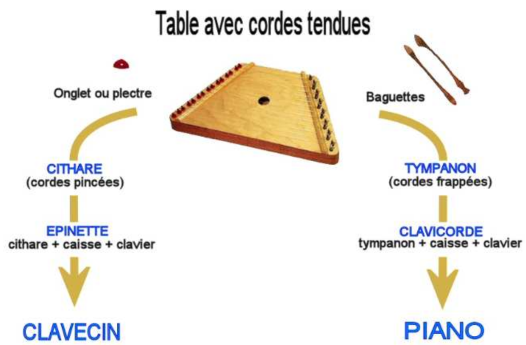
11. 1 Cas général des modes d'une corde

La vibration la plus générale d'une corde fixée à ses deux extrémités est une superposition de modes propres stationnaires, chaque mode vibrant à la fréquence propre correspondante.

Le spectre du son émis par une corde vibrante sera donc composé d'un fondamental de fréquence $\frac{c}{2\ell}$ et d'harmoniques de fréquences multiples de $\frac{c}{2\ell}$. C'est le théorème de Fourier appliqué aux ondes stationnaires.

Le son d'un instrument de musique est beaucoup plus complexe qu'une simple sinusoïde. Il est caractérisé à la fois par sa **note** (la fréquence fondamentale) et par son **timbre** (la richesse et l'intensité des harmoniques). La même note, jouée par deux instruments différents, produits des sensations très différentes à l'oreille.

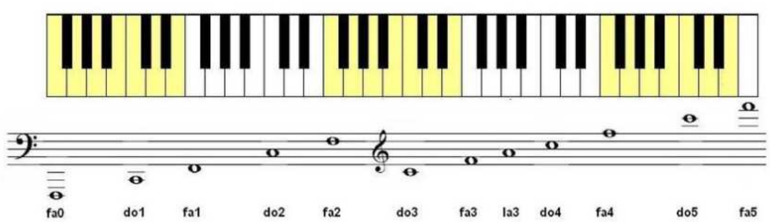
11. 2 Exemples



11. 3 Bases de solfège

Les termes de "fondamental" et d' "harmoniques" est utilisé en musique. Sans rentrer dans les détails de la gamme musicale, on peut retenir qu'un écart de 1 octave correspond à un doublement de fréquence du fondamental : un La3 a une fréquence de 440 Hz, un La4 a une fréquence de 880 Hz.

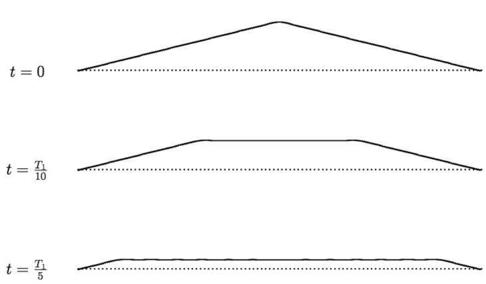
L'harmonique de rang 2 du La3 a donc la même fréquence que le fondamental du La4...



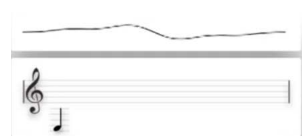
11. 4 Forme de la corde

- frottée : violon...
- frappée : piano ...
- pincée : guitare...

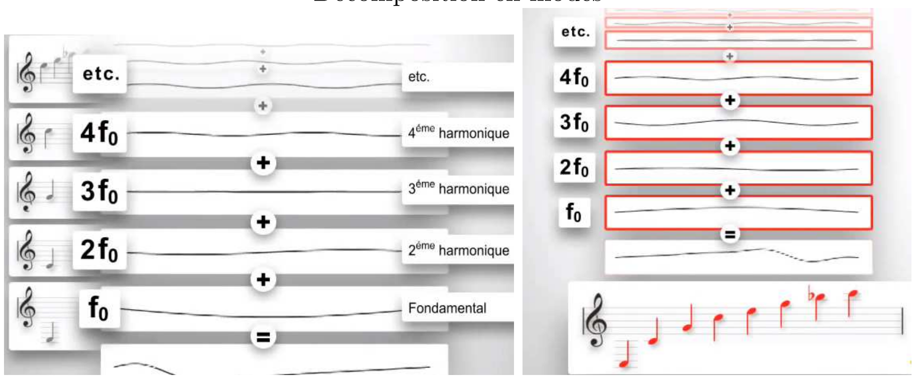
Corde pincée



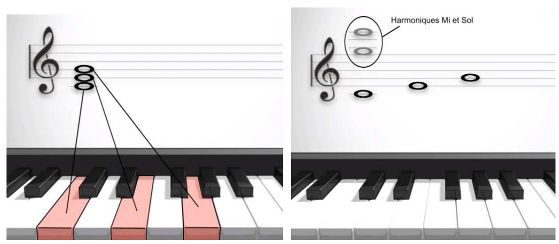
Corde frappée



Décomposition en modes



Accords : cas de l'accord majeur de DO



Intervalles, octave, gamme

- une octave correspond ainsi au doublement de la fréquence.
- en raison de sa structure, l'oreille perçoit le rapport de deux fréquences : c'est la notion **d'intervalle** i . Il est exprimé en **savarts** $= 1000.\log i$ (une octave ≈ 300 savarts)
- les premiers harmoniques d'une corde : des notes non dissonantes vérifient l'accord parfait majeur de tierce, quinte et octave :
  Do : corde de longueur ℓ
  Mi : corde de longueur $\dfrac{4\ell}{5}$
  Sol : corde de longueur $\dfrac{2\ell}{3}$
  Do de l'octave supérieure : corde de longueur $\dfrac{\ell}{2}$
  Harmonique $n = 2$: Do à l'octave
  Harmonique $n = 3 = \frac{3}{2} \times 2$: le Sol à l'octave supérieure
  Harmonique $n = 4 = 2^2$: le Do à 2 octaves au dessus du fondamental
  Harmonique $n = 5 = \frac{5}{4} \times 2^2$: le Mi à 2 octaves
  Harmonique $n = 6 = \frac{3}{2} \times 2^2$: le Sol à 2 octaves
  Harmonique $n = 7 \neq (\frac{3}{2})^p \times (\frac{5}{4})^q \times 2^r$: proche du Si bémol, note dissonante que l'on fait souvent disparaitre.
- il existe différents types de gammes : Zarlin, Pythagore, tempérée...
- dans la gamme dite "tempérée", les fréquences des notes progressent selon une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$. Cette octave est composée de douze demi-tons : les fréquences vérifient alors $f_N = f \times 2^{\frac{N}{12}}$ Il n'y a qu'un demi-ton entre les notes Mi et Fa et entre les notes Si et Do. Les autres notes sont séparées d'un ton entier. L'indice de la note donne l'octave dans laquelle elle est située. Le La3 est par exemple le troisième La figurant sur les touches d'un piano. Le La4 aura donc une fréquence de 880 Hz.

12. Cas classiques

12. 1 cas d'une masse ajoutée à la corde

12. 2 cas de la réflexion et de la transmission d'une onde à l'interface entre deux cordes