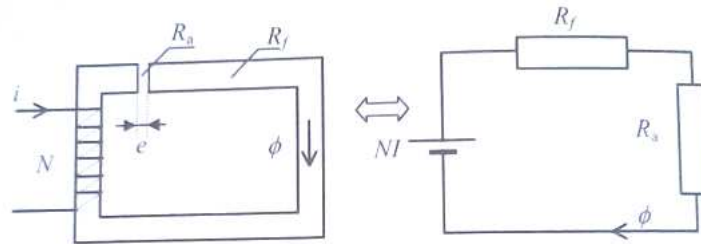


1. Introduction

On a vu :

- milieu ferromagnétique
- circuit magnétique



- réluctance $\mathcal{R} = \frac{\ell}{\mu S}$ et inductance $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$

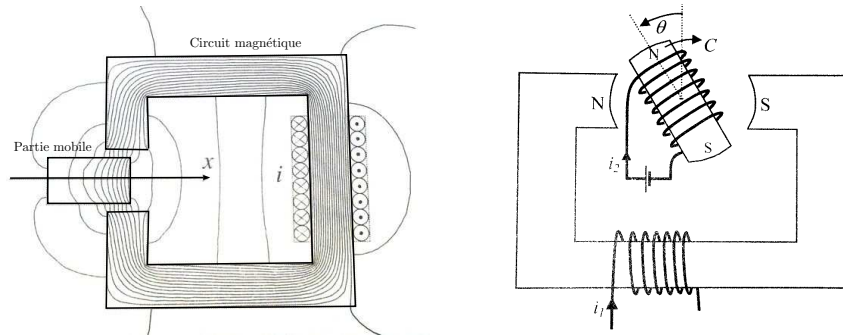
- champ magnétique dans un entrefer : hors saturation du matériau, on a $\vec{B} = \mu \vec{H}$. Le théorème d'Ampère donne $\ell H + e H_a = N.i$.

Les lignes de champ B sortent orthogonalement au matériau dans l'entrefer

La conservation du flux donne $B = B_a$. On aboutit donc à $B = B_a = \frac{\mu_0 N i}{\frac{\ell}{\mu_r} + e} \approx \frac{\mu_0 N i}{e}$ pour $\mu_r \rightarrow \infty$

Il s'agit maintenant d'étudier des contacteurs magnétiques ou électrostatiques : certaines pièces du circuit magnétiques sont **mobiles** en translation ou rotation.

On peut réaliser ainsi des **aimants de levage**, des **interrupteurs électro-mécaniques** (télérupteurs ...), électrovannes, verins etc.



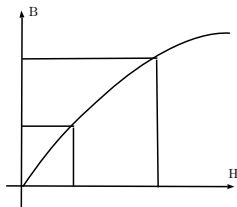
On écrira une **relation entre les dérivées de l'énergie magnétique et la force ou le couple s'exerçant sur le matériau**

Les **actionneurs** sont des systèmes moteurs (en translation ou en rotation) : on a des systèmes de base comme étudiés dans ce chapitre, et ensuite les moteurs électriques comme étudiés dans les chapitres suivants.

2. Énergie magnétique

2.1 Énergie volumique liée au tracé de B en fonction de H

L'énergie magnétique stockée par unité de volume dans un matériau est $W_{vol} = \int_0^B H(B) dB$.

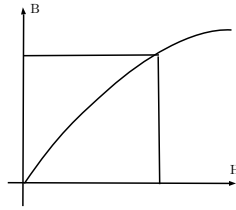


On utilise $\Phi = B.S$ et $N.i = H\ell$ donc $W_{vol} = \int_0^\Phi \frac{Ni}{S\ell} d\Phi$

donc l'énergie totale est $W = VW_{vol} = \int_0^\Phi N i d\Phi$

Si le matériau est linéaire dans la zone de fonctionnement, on a alors $W = VW_{vol} = \frac{1}{2}B.H = \frac{1}{2}\Phi.Ni$

2.2 Co-énergie : grandeur intermédiaire de calcul



L'aire hachurée n'est plus la zone au dessus de la courbe en $\int H.dB$ mais la zone inférieure. Elle correspond à $\int B.dH$

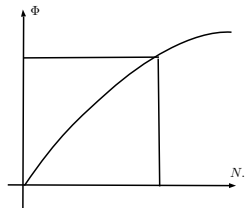
On peut écrire que l'énergie virtuelle "co-énergie" est $W' = \int_0^i \Phi d(N.i)$

Remarquons que **pour une caractéristique (H,B) linéaire**, W et W' s'écrivent tous les deux :

$$\frac{1}{2}\Phi.N.i = \frac{1}{2}B.H$$

$$\text{car } W_{vol} = \int_0^B H.dB = \int_0^B kB.dB = \frac{k}{2}B^2 = \frac{HB}{2}$$

2.3 Energie stockée dans le matériau magnétique



En appliquant le théorème d'Ampère, on a $N.i = \mathcal{R}\Phi$ donc $W = \int_0^\Phi N.i.d\Phi$ est l'énergie totale stockée dans le matériau.

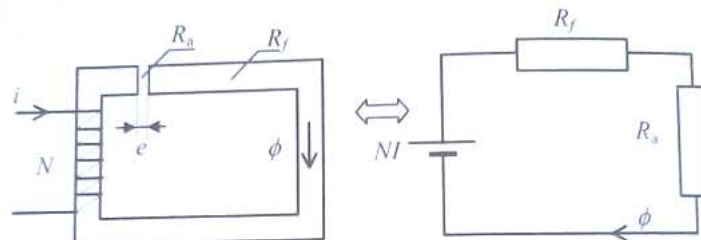
Si le tracé est **linéaire**, on aboutit à $W = \frac{1}{2}N.i.\Phi$

On rappelle que l'inductance du circuit magnétique bobiné est $L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$

On peut alors simplifier :

$$W = \frac{1}{2}L.i^2 \text{ dans le cas linéaire}$$

2.4 Energie stockée dans un entrefer



La loi d'Ampère donne $H.\ell + H_e.e = N.i$ ou encore avec le circuit équivalent : $N.i = (R_f + R_a)\Phi$. La conservation du flux de B donne $B_e S_e = BS$ avec dans notre exemple $S_e = S$.

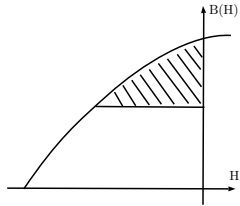
Dans le matériau magnétique, et dans le cas linéaire, $W_{1,vol} = \frac{1}{2}B.H = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$.

Dans l'entrefer (air), et dans le cas linéaire, $W_{2,vol} = \frac{1}{2}B.H = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$.

On a donc $\frac{W_{2,vol}}{W_{1,vol}} = \frac{1}{\mu_r} \ll 1$ donc

l'énergie magnétique est principalement stockée dans l'entrefer quand il est présent

2. 5 Cas d'un aimant permanent



Avec le théorème d'Ampère, on a $H_A \ell_A + H \ell = 0$ puisqu'il n'y a pas de courants et pas d'entrefer

L'aimant se comporte comme un "générateur magnétique" dans le circuit magnétique équivalent.

3. Bilan d'énergie, cas d'une variation d'énergie

3. 1 Expression de la puissance pour un matériau magnétique

On avait vu que l'énergie s'écrit $dW_{vol} = \frac{1}{2}H.dB$ donc ' la puissance associée est $p = H.\frac{dB}{dt}$.

On peut donc le transformer en $p = N.i.\frac{d\Phi}{dt}$.

Dans un matériau linéaire, on a $N.i = \mathcal{R}\Phi$ donc on a

$$W = \frac{1}{2} \frac{(N.i)^2}{\mathcal{R}}$$

ou encore

$$W = \frac{1}{2} \mathcal{R}\Phi^2$$

En effectuant les dérivées en écrivant la puissance associée, on a donc maintenant :

$$p = \frac{N.i}{\mathcal{R}} \frac{d(N.i)}{dt} - \frac{(N.i)^2}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dt}$$

$$p = \mathcal{R}\Phi \frac{d\Phi}{dt} + \frac{1}{2}\Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dt}$$

3. 2 Cas à réluctance constante $\mathcal{R}$

En remplaçant dans les équations précédentes, on a donc :

$$p = \frac{N.i}{\mathcal{R}} \frac{d(N.i)}{dt} = \mathcal{R}\Phi \frac{d\Phi}{dt}$$

3. 3 Cas à flux Φ constant

$$p = -\frac{(N.i)^2}{\mathcal{R}^2} \frac{d\mathcal{R}}{dt} = \frac{1}{2}\Phi^2 \frac{d\mathcal{R}}{dt}$$

3. 4 Lien entre l'énergie et l'écriture d'une force ou d'un couple ?

On sait que $p = \vec{F}.\vec{v} = F\frac{dx}{dt}$ pour un déplacement unidimensionnel donc

$$F = \frac{p.dt}{dx} = \frac{dW}{dx}$$

4. Principes variationnels

4.1 Principe de réluctance $\mathcal{R}$ minimum

L'énergie magnétique W donne lors de la variation de ses paramètres une position d'équilibre stable si cette énergie est minimum

Les circuits magnétiques à partie mobile évoluent jusqu'à un équilibre stable correspondant à une réluctance $\mathcal{R}$ minimum

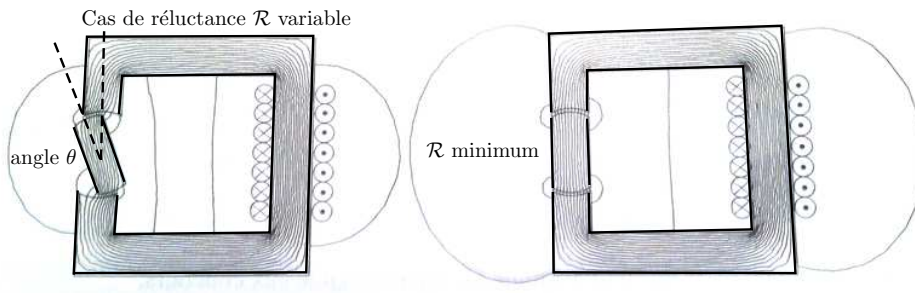
En effet, $dW = V.H.dB = N.i.d\Phi = \mathcal{R}\Phi.d\Phi$

$$\text{et } d\left(\frac{1}{2}\mathcal{R}\Phi^2\right) = \mathcal{R}.\Phi.d\Phi + \frac{\Phi^2}{2}d\mathcal{R}$$

$$\text{donc } dW = \mathcal{R}.\Phi.d\Phi - \frac{\Phi^2}{2}d\mathcal{R}$$

On voit qu'à flux constant, on a $dW = -\frac{\Phi^2}{2}d\mathcal{R}$ donc un travail mécanique de translation ou de rotation vérifie donc

$F.dx(\text{ou } C.d\theta) = -\frac{\Phi^2}{2}d\mathcal{R} > 0$ dans le cas spontané (énergie fournie à l'extérieur) donc $d\mathcal{R} < 0$ qui est la règle de la réluctance minimum.



4.2 Principe d'inductance L maximum

Pour un flux Φ dans une section du matériau,
on a $\Phi' = N.\Phi$ pour le flux à travers la bobine d'inductance L .
L'énergie vérifie $dW = V.H.dB = i.d(N\Phi) = i.d\Phi'$

Par définition de l'inductance, $\Phi' = L.i$

$$\text{donc } d\Phi' = L.di + i.dL$$

$$\text{donc } i.d\Phi' = L.i.di + i^2.dL = d\left(\frac{1}{2}L.i^2\right) + \frac{i^2}{2}dL$$

Transfert d'énergie au niveau de l'actionneur :

$$\boxed{p_{elec} = u.i} \rightarrow \boxed{\text{Conversion électromagnétique } p_{em} = \frac{dW_{em}}{dt} + \frac{dW_m}{dt}} \rightarrow \boxed{\text{puissance mécanique } p_m}$$

Lorsque l'on est à $i = \text{cste}$, on a $i.d\Phi' = \frac{i^2}{2}dL$ qui correspond donc à la puissance mécanique $F.dx$ ou $C.d\theta$.

Le déplacement spontané du matériau correspond à $F.dx > 0$ ou $C.d\theta > 0$ donc on a $\boxed{dL > 0}$ qui est donc la **règle de l'inductance maximum**

Si l'on continue avec ces conditions, on a avec $i = \text{cste}$, $d\Phi > 0$ ce qui correspond à la **règle du flux maximum**

5. Expressions des couples et forces

5.1 Couple et force par le calcul de l'énergie

Le bilan d'énergie lors de la conversion est :

$$p_{elec} = p_{Joule} + p_{em} + p_{méca}$$

On a donc :

$$dW_{em} + dW_{méca} = N.i.d\Phi = i.d\Phi'$$

De plus, on écrit la différentielle totale :

$$dW_{em} = \frac{\partial W_{em}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{em}}{\partial \Phi'} d\Phi'$$

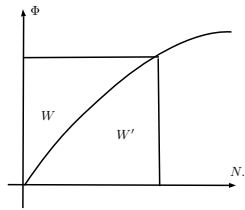
$$\text{On a donc } \frac{\partial W_{em}}{\partial x} dx + \frac{\partial W_{em}}{\partial \Phi'} d\Phi' + F.dx = i.d\Phi'$$

$$\text{ce qui signifie que } i = \frac{\partial W_{em}}{\partial \Phi'} \quad \text{et } F = -\frac{\partial W_{em}}{\partial x}$$

Le seul souci de ces expressions est qu'il est difficile d'exprimer W_{em} en fonction notamment de Φ'

5.2 Calcul par les travaux virtuels

C'est le moment d'utiliser la co-énergie et les travaux virtuels pour obtenir une expression simple d'énergie à dériver afin d'obtenir F et C .



L'aire totale est $\Phi.N.i = i.\Phi'$ et elle vaut aussi $W_{em} + W'_{em}$.

En différentiant, on a $dW_{em} + dW'_{em} = i.d\Phi' + \Phi'.di$.

Mais on avait aussi $dW_{em} + dW_{méca} = i.d\Phi'$

Donc finalement $dW'_{em} = dW_{méca} + \Phi'.di$

L'une des variables naturelle de dW'_{em} est donc i , et on ajoute une dépendance en x ou θ :

$$dW'_{em} = \frac{\partial W'_{em}}{\partial x} dx + \frac{\partial W'_{em}}{\partial i} di$$

$$\text{ou bien } dW'_{em} = \frac{\partial W'_{em}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial W'_{em}}{\partial i} di$$

$$\text{donc par identification : } \Phi' = \frac{\partial W'_{em}}{\partial i}$$

$$\text{et } F = \frac{\partial W'_{em}}{\partial x} \quad \text{ou} \quad C = -\frac{\partial W'_{em}}{\partial \theta}$$

5.3 Cas d'un milieu matériel linéaire

$$W_{em} = W'_{em}$$

5.4 En résumé



Cas d'un seul bobinage et d'un milieu linéaire : expression de la force et du couple

Nous avons :

$$F = \frac{\partial(\text{énergie})}{\partial x} \quad (i=cste) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

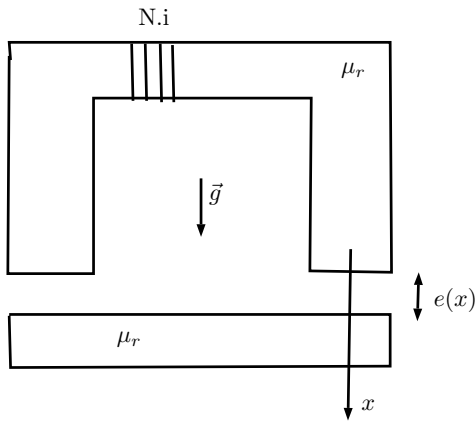
$$C = \frac{\partial(\text{énergie})}{\partial \theta} \quad (i=cste) = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$

Calcul rapide : $F.dx = i.d\Phi' - dW_{em}$, avec $\Phi' = L(x).i$, $W_{em} = L(x).i^2/2$ donc $F = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx}$

de même $C.d\theta = i.d\Phi' - dW_{em}$ donne $C = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta}$

6. EXEMPLES

6.1 Electro-aimant de levage



But : exprimer la force F de levage en fonction de i .

Méthode de résolution :

– Expression du flux magnétique

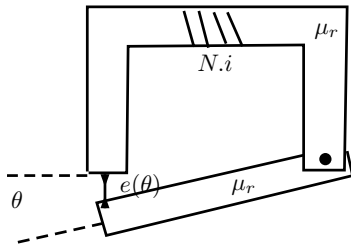
$$\Phi = \frac{\mu_0 N i S}{\frac{\ell_1}{\mu_{r,1}} + \frac{\ell_2}{\mu_{r,2}} + 2.e(x)}$$

si les deux matériaux ont des valeurs différentes $\mu_{r,1}$ et $\mu_{r,2}$, en posant ensuite $e(x) = x$

– Inductance $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\frac{\ell_1}{\mu_{r,1}} + \frac{\ell_2}{\mu_{r,2}} + 2.e(x)}$

– Force magnétique en équilibre avec le poids mg de la barre levée pour $x = 0$

6.2 Rotation d'une barre

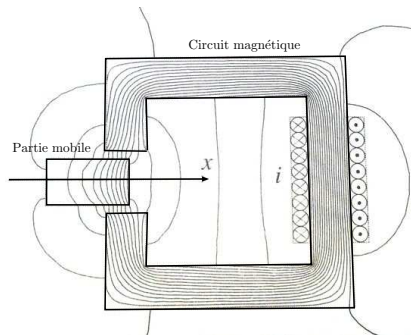


– Inductance $L = \frac{N^2}{R_{air} + R} \approx \frac{N^2}{R_{air}} = \frac{N^2 \mu_0 S}{r\theta}$

– Energie $Li^2/2$

– couple $C = -\frac{i^2 \mu_0 S N^2}{2r\theta^2}$

6.3 Translation



Entrefer : deux fois e ; dans la partie fixe : ℓ' et B' ; dans la partie mobile : ℓ et B

$$\frac{B}{\mu} \cdot \ell + \frac{B'}{\mu} \cdot \ell' + \frac{B_{air}}{\mu_0} \cdot 2e = N \cdot i$$

Flux : $a \cdot x \cdot B = B' \cdot a^2 = a \cdot x \cdot B_{air}$ pour une section carrée

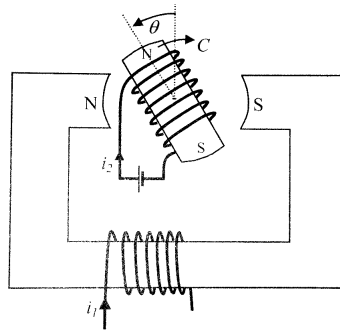
Cas $\mu_r \rightarrow \infty$: $B' = \frac{\mu_0 N \cdot i \cdot x}{2e \cdot a}$

$$L = \frac{N\Phi}{i} = \frac{\mu_0 a N^2 x}{2e}$$

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx}$$

On peut ajouter une force de rappel au matériau mobile et obtenir un oscillateur.

6.4 Couple de rotation, moteur à réluctance variable



Cas $i_2 = 0$. On a une pièce magnétique (μ_r) en rotation possible avec l'angle θ .

$$F = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\theta}$$

Modèle tenant compte des extrema du flux : minimum pour $\theta = \pi/2$ et maximum pour $\theta = 0$.

On pose donc $L(\theta) = L_0 + A \cdot \cos(2\theta)$

On obtient donc $C = -A i^2 \sin(2\theta)$.

Possibilité d'avoir un moteur ?

... ce sera le cas si le courant i est variable, par exemple sinusoïdal

Cas $i_2 \neq 0$. On a un rotor alimenté par i_2 qui reçoit un flux magnétique supplémentaire par rapport au cas précédent.

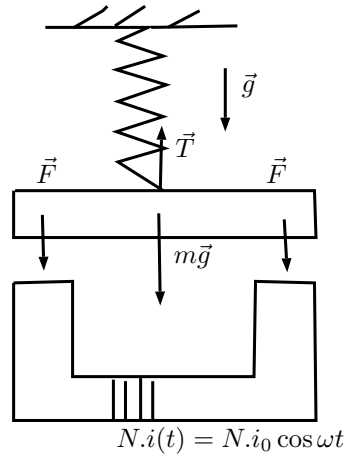
$$dW_{elec} = i_1 \cdot d\Phi_1 + i_2 \cdot d\Phi_2$$

$$W_{em} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$$

$$C d\theta = i_1 d\Phi_1 + i_2 d\Phi_2 - dW_{em}$$

$$C = \frac{1}{2} i_1^2 \frac{dL_1}{d\theta} + \frac{1}{2} i_2^2 \frac{dL_2}{d\theta} + i_1 i_2 \frac{dM}{d\theta}$$

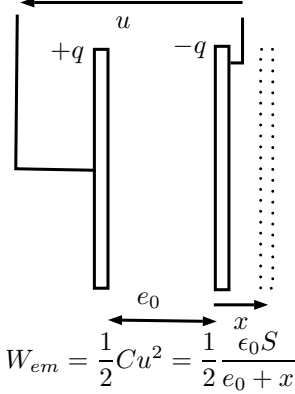
6.5 Oscillateur



Le but est ici, pour un matériau magnétique caractérisé par μ_r , de décrire comment obtenir l'équation différentielle du mouvement et déduire la période des petites oscillations.

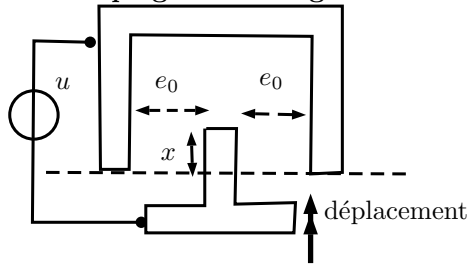
6.6 Analogie en électrostatique : actionneurs

– Cas des deux plaques d'un condensateur plan



$$F = \frac{1}{2} u^2 \frac{dC}{dx}$$

– Cas des peignes interdigités



$$C = 2 \frac{\epsilon_0 \ell x}{e_0}$$

$$F = \frac{\epsilon_0 \ell}{e_0} u^2 \text{ avec la possibilité d'augmenter le nombre de digitations.}$$