



## Les quatre équations de Maxwell complètes à la base du chapitre

Celles-ci s'écrivent :

$\text{div} \vec{B} = 0$	M. T.
$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$	M.F.
$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	M.G.
$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$	M.A.

### 1. Conditions de l'A.R.Q.S.

Cherchons à énoncer un critère permettant de définir les conditions pour avoir le droit de faire l'approximation de l'A.R.Q.S. qui se résume à remplacer  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$  par  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

On peut raisonner sur les dimensions :  $\mu_0 j \gg \epsilon_0 \mu_0 \frac{E}{T}$  ou encore  $\frac{B}{L} \gg \epsilon_0 \mu_0 \frac{E}{T}$

On a donc  $L \ll cT$ .

Signification concrète? Tout phénomène de propagation est supposé quasi-immédiat.

### 2. Conséquences de l'A.R.Q.S.

#### 2.1 Loi des noeuds :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ impose donc que } \text{div} \vec{j} = 0$$

#### 2.2 Théorème d'Ampère

L'équation utilisée en statique garde la même forme :

$$\oint \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I(t)$$

#### 2.3 FAUX PARADOXE

Attention à l'utilisation de M-F et M-A :

imposer un champ  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t$  donne une incompatibilité avec M-F.

Il conviendra de faire très attention avec le modèle des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  pour le condensateur et la bobine. Il ne faut pas rester à l'ordre zéro du développement et trouver  $\vec{E} = \vec{E}_0(t) + \vec{E}_1(\vec{r}, t)$  ainsi que  $\vec{B} = \vec{B}_0(t) + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$  au minimum.

## 2.4 Induction dans un conducteur : création d'un courant induit "de Foucault"

Un champ magnétique variable est source d'un champ électrique variable.

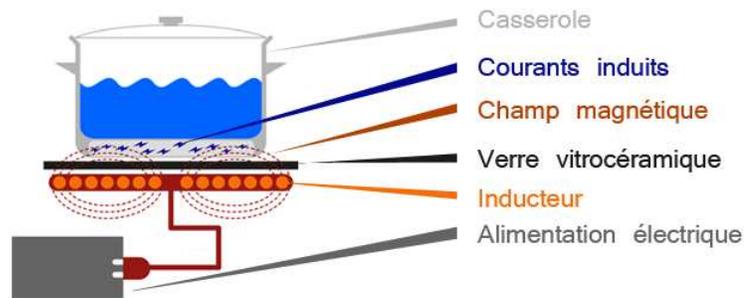
$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Le champ  $\vec{E}$  est ensuite source de mouvement des électrons si un conducteur est soumis à ce champ variable induit :

$$\vec{j}_{\text{induit}} = \gamma\vec{E}$$

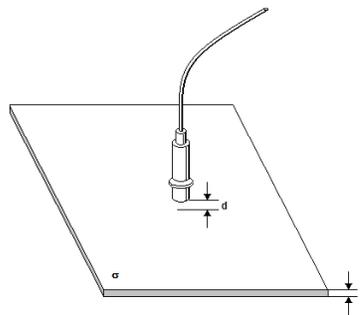
Ces courants se répartissent dans le volume du conducteur et sont appelés "Courants de Foucault"

**Avantages** Utilisation dans les fours à induction et avec les plaques de cuisson à induction



Application industrielle :

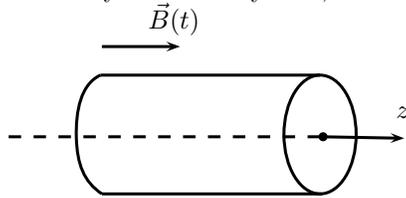
mesure de l'épaisseur d'une plaque métallique passée au laminoir



**Inconvénients** Echauffement non recherché des pièces métalliques soumises à un champ  $\vec{B}$  variable.

### ? Exercice 1: Exemple d'un cylindre métallique soumis à $\vec{B}$ variable

Soit un cylindre de rayon  $R$ , de longueur  $\ell$  et de conductivité  $\gamma$



Le champ magnétique appliqué est de la forme  $\vec{B}(t) = B(t)\vec{u}_z$  de direction fixe. On peut prendre un cas simple comme un champ sinusoïdal tel que  $B(t) = B_0 \cos \omega t$

On montre que  $\vec{E}(\vec{r}, t) = E(\vec{r}, t)\vec{u}_\theta$

Méthode 1 : calcul intégral

Pour trouver l'expression de  $\vec{E}$ , on utilise la relation de MF  $\vec{rot}\vec{E} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$  en calculant le flux de  $\vec{rot}\vec{E}$  à travers une section  $\pi r^2$  du conducteur cylindrique :

$$\iint_S \vec{rot}\vec{E} \cdot d^2\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E = \iint_S \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S}$$

On obtient finalement :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} B_0 \omega r \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

$$\text{et donc } \vec{j}_{induit}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} B_0 \gamma \omega r \sin \omega t \vec{u}_\theta$$

La puissance volumique dissipée par effet Joule est donc  $p(\vec{r}) = \frac{1}{4} B_0^2 \gamma \omega^2 r^2 \sin^2 \omega t$

qui donne une valeur moyenne volumique  $p_m(\vec{r}, t) = \frac{1}{8} B_0^2 \gamma \omega^2 r^2$  échangée avec le volume  $d^3\mathcal{V} = r dr d\theta dz$ .

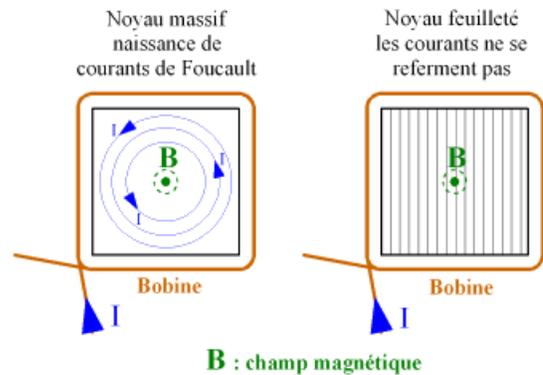
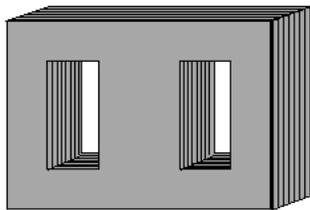
La puissance dissipée dans le cylindre de rayon  $R$  et le longueur  $\ell$  est donc

$$P_m = \frac{\pi}{16} B_0^2 \gamma \omega^2 \ell R^4$$

**? Exercice 2: Intérêt du feuilletage des noyaux des transformateurs**

Après avoir vu la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans un cylindre (C) de section  $S_0$ , que devient cette puissance moyenne dissipée pour  $N$  conducteurs cylindriques de section  $S_N = \frac{S_0}{N}$  localisés à la place du cylindre (C) initial.

**Applications dans les carcasses de transformateurs**



**? Exercice 3: Exemple d'un cylindre métallique soumis à  $\vec{B}$  variable : 2ème méthode**

On reprend le calcul de la méthode intégrale.

Méthode 2 : utilisation du rotationnel

On utilise  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  avec  $\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{u}_z$

1) Montrer que  $\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \cdot E_\theta)}{\partial r}\right) = -\frac{\partial B}{\partial t}$

2) En déduire l'expression de  $E_\theta$

### 3. Bilans d'énergie, équation locale

Les équations de Maxwell donnent  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  liés pour le cas dépendant du temps  $t$ . L'exemple des ondes électromagnétiques (ondes lumineuses, ondes radio, etc.) est un cas classique.

Puisque les champs  $E$  et  $B$  transportent de l'énergie électromagnétique, on définira une densité d'énergie électromagnétique  $w$ , ce qui permettra d'aborder ensuite des bilans :

ANALOGIE :  
cas du bilan de charges

$$\frac{dQ}{dt} = - \oiint_S \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$$

#### BILAN ENERGETIQUE ELECTROMAGNETIQUE :

une énergie électromagnétique contenue dans un volume  $\mathcal{V}$  variant entre  $t$  et  $t + dt$  répartit sa variation entre un flux à travers la surface fermée et un transfert par effet Joule à la matière si elle est présente dans ce volume (n'oublions pas que  $E$  et  $B$  n'ont pas besoin de présence de matière pour être présents)

### 4. Vecteur de Poynting

Le vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique est appelé vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}$ . La puissance traversant une surface donnée  $S$  est le flux de ce vecteur  $\vec{\Pi}$  :  $P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$ .



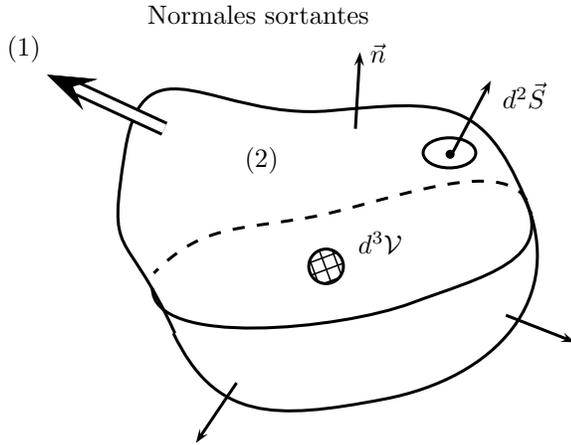
#### Vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$

Le vecteur de Poynting correspond à la quantité d'énergie  $d^3\mathcal{E}$  électromagnétique (liée à l'existence dans l'espace de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ) qui traverse une surface unité par unité de temps :

$$d^2\Phi_P = \frac{d^3\mathcal{E}}{dt} = \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{S}$$

**5. Densité locale d'énergie électromagnétique**

En faisant un bilan pour un volume  $dV$  quelconque, la diminution de l'énergie contenue dans ce volume du fait de la présence de  $\vec{E}$  est égale à la somme de l'énergie transférée au support et de l'énergie sortant de ce volume  $dV$  : en notant  $w$  l'énergie volumique ("densité d'énergie électromagnétique"),  $-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}$  qui est l'équation locale du bilan énergétique.



- (1) flux sortant d'énergie électromagnétique
- (2) énergie électromagnétique  $\mathcal{E}$  contenue dans le volume  $\mathcal{V}$  + énergie transmise à la matière sous forme d'effet Joule

**Démontrons l'équation locale :**

bilan d'énergie à l'instant $t$	$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(t + dt) + \Phi \cdot dt + \delta W_{Joule}$				
$\mathcal{E}(t)$	bilan d'énergie à $t + dt$				
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; width: 33%; text-align: center; vertical-align: middle;"><math>\mathcal{E}(t + dt)</math></td> <td style="border: 1px solid black; width: 33%; text-align: center; vertical-align: middle;"><math>\Phi dt</math> flux sortant</td> <td style="border: 1px solid black; width: 33%; text-align: center; vertical-align: middle;"><math>\delta W_{Joule}</math> Joule</td> </tr> </table>	$\mathcal{E}(t + dt)$	$\Phi dt$ flux sortant	$\delta W_{Joule}$ Joule	
$\mathcal{E}(t + dt)$	$\Phi dt$ flux sortant	$\delta W_{Joule}$ Joule			

On a  $\mathcal{E}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} w(t) d^3\mathcal{V}$

On a donc  $\Phi \cdot dt + \delta W_{Joule} = - \iiint \frac{\partial w}{\partial t} dt d^3\mathcal{V}$

Flux sortant d'énergie :  $\Phi = \oiint_S \vec{\Pi} \cdot d^2\vec{S}$  et énergie échangée par effet Joule :  $\delta W_{Joule} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d^3\mathcal{V} dt$

On aboutit donc à la relation locale de conservation de l'énergie électromagnétique, dite équation de Poynting :

$$\boxed{-\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} \vec{\Pi} + \vec{j} \cdot \vec{E}}$$

Pour être plus précis, i-e pour déterminer l'expression de  $w$  en fonction de  $E$  et  $B$ , on va partir d'une expression "simple" à décrire :  $\vec{j} \cdot \vec{E}$ .

ATTENTION : on ne fera ici aucune approximation, donc on utilise les équations de MAXWELL complètes!!!

M.A. :  $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et on remarque que dans le produit scalaire  $\vec{j} \cdot \vec{E}$  on peut utiliser la formule générale  $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$  (donnée dans les formulaires)

En utilisant MA pour transformer cette équation, on obtient  $-\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) = \text{div} \left( \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E}$

cela montre bien le rôle de chaque terme :  $w = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$  est l'énergie volumique d'origine électro-magnétique

("densité" d'énergie), et  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$  est le vecteur de Poynting.

#### ? Exercice 4: EXEMPLE de l'énergie magnétique stockée dans une bobine

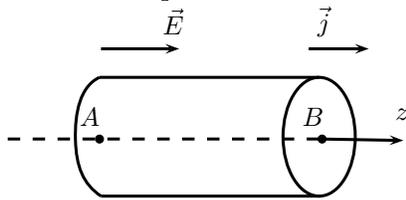
Soit une bobine cylindrique comportant  $n$  spires par mètre et parcourue par un courant  $i$ . Là où l'on fera les calculs, on suppose que le champ à l'intérieur de la bobine est  $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$  et nul à l'extérieur.

#### ? Exercice 5: EXEMPLE de l'énergie électrique stockée dans un condensateur

Soit un condensateur aux plaques planes (disques de rayon  $R$  grand devant la distance entre les plaques) créant un champ électrique  $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$  supposé uniforme, sans effets de bords et nul à l'extérieur.

## 6. Exemple d'application : bilan dans une résistance $R$ , (exercice)

### 6.1 Position du problème



### 6.2 Champ magnétique créé par le dipôle

On considère un modèle très simplifié d'un "fil" résistif de grande longueur de telle sorte que l'on peut utiliser les résultats du champ  $B$  créé par un fil infini :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

### 6.3 Vecteur de Poynting correspondant

Le champ  $E$  est suivant l'axe des  $z$ . La section du conducteur est notée  $S$ .

On peut calculer le vecteur de Poynting pour le dipôle :

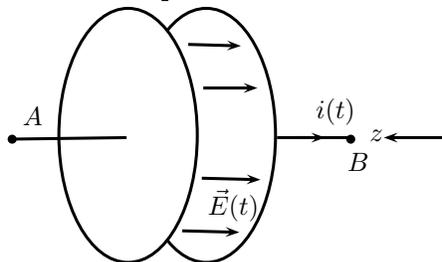
$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

On obtient donc 
$$\vec{\Pi} = -\frac{i^2}{2\pi\gamma S r} \vec{u}_r.$$

La puissance "rayonnée" (ici elle entre dans le dipôle) est donc  $P_R = Ri^2$

## 7. Exemple d'application : bilan dans un condensateur $C$ (exercice)

### 7.1 Position du problème



Les plaques sont séparées d'une distance  $\ell$

### 7.2 Champ électrique

Le modèle simplifié que l'on prend néglige les effets de bords : on a entre les plaques le champ correspondant à

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z, \text{ et le champ est nul en dehors.}$$

### 7.3 Champ magnétique

Dans le milieu entre les plaques,  $\vec{j} = \vec{j}_e = \vec{0}$  et  $\rho = 0$  dans les équations de Maxwell.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{0} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Deux méthodes de résolution : (1) la résolution directe (locale) à partir de l'équation du rotationnel, car celui-ci se simplifie bien car le courant  $i$  (mis à part entre les plaques très proches) est source d'un champ magnétique  $\vec{B}$  orthoradial du type  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$  ou (2) le passage aux expressions intégrales.

**Méthode (1) :**  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left( \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$

On obtient  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) \right) \vec{u}_z = \mu_0 \left( \vec{0} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{-\sigma(t)}{\epsilon_0} \vec{u}_z \right)$

On aboutit donc à  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 r}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{u}_\theta$  avec  $\sigma = \frac{q(t)}{\pi R^2}$ .

**Méthode (2) :** on utilise le théorème d'Ampère pour éviter le calcul avec le rotationnel, en suivant un contour circulaire de rayon  $r$  :

On a donc  $2\pi r B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \pi r^2$

#### 7.4 Puissance échangée

On écrit  $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$  à la périphérie des plaques, donc en  $r = R$ , avec  $S = \pi R^2$  :

$$\vec{\Pi} = -\frac{q(t)}{2\pi\epsilon_0 SR} \frac{dq}{dt} \vec{u}_r$$

Le flux  $P$  du vecteur de Poynting à travers la surface latérale  $2\pi R\ell$  est :

$|P| = \frac{d}{dt} \frac{q^2}{2C}$  puisque l'on sait que  $C = \frac{\epsilon_0 S}{\ell}$  donc les champs créés par le circuit créent une énergie qui entre dans la zone "condensateur" lors de la charge d'un condensateur.

**8. Exemple d'application : bilan dans une inductance  $L$  (exercice)**

On effectue le même type de démonstration :

- Champ magnétique créé par une bobine avec  $n$  le nombre de spires par mètre, en prenant l'hypothèse simplificatrice d'une bobine quasi-infinie :  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$

- Champ électrique associé

Il est calculé avec  $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

- Vecteur de Poynting

On montre que  $\vec{\Pi} = -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} i^2(t) \right) \vec{u}_r$

- Puissance échangée

On retrouve le terme  $P = \frac{1}{2} L \dot{i}^2$

## 9. Inductance propre et mutuelle

### 9.1 Définitions

La loi de Biot et Savart montre que le flux de  $B$  à travers un circuit est proportionnel au courant.

On a donc  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{12} \cdot i_1$  et  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{21} \cdot i_2$  avec  $M_{12} = M_{21} = M$

Le signe de  $M$  est quelconque.

Dans le cas du flux propre,  $\Phi_{1 \rightarrow 1} = L_1 \cdot i_1$  et  $\Phi_{2 \rightarrow 2} = L_2 \cdot i_2$

Le signe de  $L$  est positif :  $L \geq 0$

### 9.2 Couplage

Dans le cas de deux circuits couplés par leurs champs magnétiques respectifs, l'énergie magnétique est  $E_m =$

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + \frac{1}{2}M i_1 \cdot i_2 + \frac{1}{2}M i_2 \cdot i_1$$

$$E_m = i_2^2 \left( \frac{1}{2}L_1 x^2 + \frac{1}{2}L_2 + Mx \right) \geq 0 \text{ donc pas de racines réelles donc } \Delta \leq 0 \text{ donc } M^2 - L_1 L_2 \leq 0$$

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}$$

## ? Exercice 6: EXEMPLE de circuits couplés : bilan énergétique

Circuit (1) :  $e_1$  générateur +  $R_1 + L_1$  ; circuit (2) :  $R_2 + L_2$

