

Liens avec les cours précédents :

Rappelons simplement ici les ordres de grandeurs utiles : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9$ S.I. et $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ SI. Rappelons également que l'étude se fait principalement dans le vide : les milieux diélectriques et magnétiques ne sont pas abordés totalement dans le programme de PSI. On parlera néanmoins de ces milieux dans le cours sur les transformateurs, par exemple, et on abordera le cas des plasmas.

1. Conservation de la charge.

démonstration classique :

2. Postulat

Les équations précédemment écrites en Statique ne sont pas compatibles avec la conservation de la charge en régime dépendant du temps : en effet $\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0\vec{j}$ n'est pas compatible avec la conservation de la charge $div\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ car $div(\overrightarrow{rot\vec{B}}) = \vec{0}$ correspondrait alors à $div\vec{j} = 0$.

Il faut donc changer les équations de la Statique, les compléter.

Les équations de Maxwell dans le vide correspondent à un postulat justifié par le fait que les équations intégrales permettent de retrouver les lois standards, et pour vous, les théorèmes de Gauss et d'Ampère de la Statique par exemple.



Les quatre équations de Maxwell complètes

Celles-ci s'écrivent :

$div\vec{B} = 0$	M. T.
$\overrightarrow{rot\vec{E}} = \frac{-\partial\vec{B}}{\partial t}$	M.F.
$div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	M.G.
$\overrightarrow{rot\vec{B}} = \mu_0 \left(\vec{j}_e + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right)$	M.A.

Les équations de Maxwell dans les milieux (magnétiques, diélectriques, ...) s'écrivent un peu différemment.

Retour à la conservation de la charge :

on peut se rendre compte que la loi de conservation de la charge est incluse dans les équations de Maxwell dans le vide. En prenant la divergence de MF et MA et en utilisant MG, on aboutit à $\text{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ s'il n'y a ni sources ni puits de charges.

3. Equation de Maxwell Gauss

La relation $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ a été établie en régime stationnaire. On a fait les calculs de \vec{E} à l'aide du théorème de Gauss. On peut également utiliser directement les équations locales.

? Exercice 1: Champ \vec{E} d'une sphère chargée en volume

On considère dans le cas statique une sphère de rayon R chargée en volume uniformément avec la charge volumique ρ . Calculer $\vec{E}(M)$ dans les deux cas $r < R$ et $r > R$

? Exercice 2: Champ \vec{E} d'une sphère chargée en surface

On considère dans le cas statique une sphère de rayon R chargée en surface uniformément avec la charge surfacique σ . Calculer $\vec{E}(M)$ dans les deux cas $r < R$ et $r > R$

La relation $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ reste valable en régime non stationnaire.

4. Equation de Maxwell Ampère

La relation $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}_e$ a été établie en régime stationnaire. On a fait les calculs de \vec{B} à l'aide du théorème d'Ampère. On peut également utiliser directement cette équation locale.

? Exercice 3: Champ \vec{B} créé par un fil cylindrique parcouru par \vec{j}

On considère un fil infini cylindrique de rayon R parcouru par une densité de courant volumique uniforme $\vec{j} = j\vec{u}_z$. Calculons le champ magnétique $\vec{B}(M)$.

En utilisant le théorème de Stokes pour le calcul de la circulation de \vec{B} , on peut ensuite utiliser MA pour retrouver une formule qui ressemble au théorème d'Ampère commençant par $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$

pour aboutir à $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d^2\vec{S}$: le théorème d'Ampère de la Statique est modifié en tenant compte d'un terme dû au champ électrique.



Equation de Maxwell Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d^2 \vec{S}$$

C'est la traduction locale du théorème d'Ampère.

Cela permet d'expliquer que les sources de champ \vec{B} sont donc les courants volumiques et les champs $\vec{E}(t)$ variables avec le temps.

En régime variable, le terme non nul $\mu_0 \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d^2 \vec{S}$ est nommé "courant de déplacement" et noté I_D ; il est associé à un vecteur densité de courant de déplacement \vec{j}_D car il est homogène à un vecteur \vec{j} . Néanmoins, attention, il n'est pas associé à un réel déplacement libre de charges comme l'est \vec{j}_e .

? Exercice 4: Champ magnétique sans courants réels dans un cylindre isolant

On considère une zone diélectrique dans un cylindre infini de rayon $r = R$ et d'axe de révolution Oz . Ce milieu interdit l'existence d'un courant \vec{j}_e . Néanmoins, un champ extérieur forcé variable donne une interaction avec le diélectrique et crée un champ total $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ dans le cylindre. En déduire si le milieu est source de champ magnétique \vec{B} .

? Exercice 5: Champ magnétique sans courants réels sur une plaque plane

On considère une plaque plane modélisée par un plan infini, placé en $z = 0$. Cette plaque est métallique et chargée avec la densité surfacique σ . Par contre, une influence extérieure impose que $\sigma = \sigma_0 \cos(\omega t)$. En déduire les champs créés par cette distribution de charges.

5. Equation de Maxwell Thomson

Le champ magnétique est à **flux conservatif**. Il n'y a pas de "charges" magnétiques analogues aux charges électriques qui seraient les sources du champ \vec{B} .

6. Equation de Maxwell Faraday

On a vu que le champ \vec{E} **permanent** est à circulation conservative : $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

Dans le **cas non stationnaire**, en écrivant la circulation de \vec{E} sur un contour fermé C et en utilisant MF, on en déduit que

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$$



Equation de Maxwell Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

C'est la traduction locale de la loi intégrale de Faraday vue en 1ère année.

Cela permet d'expliquer le phénomène d'induction dans un circuit fixe par couplage entre les champs \vec{E} et \vec{B} .

En régime variable, un champ $\vec{B}(t)$ dépendant du temps est source d'un champ électrique.

$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d^2\vec{S} = -\frac{d\Phi}{dt}$: en régime variable, une fem e non liée à la présence d'un générateur ne doit par exemple pas être oubliée dans l'écriture de la loi des mailles d'un circuit.

? Exercice 6: Rappel des rails de Laplace

On considère les rails parallèles de Laplace fermés sur une résistance R et un générateur $E = cste$ et grâce à une barre conductrice normalement mobile. On soumet le système à un champ magnétique perpendiculaire au plan des rails de la forme $\vec{B} = cste$. On lance la barre à une vitesse initiale $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$. Dessiner le schéma expérimental, le schéma électrique équivalent et en déduire l'expression du courant induit circulant dans ce circuit.

7. Cas particulier du régime stationnaire



Equations de Maxwell pour $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Les quatre équations de Maxwell sont des équations différentielles couplées entre \vec{E} et \vec{B} . Dans le cas de la Statique, on obtient un **découplage total** entre \vec{E} et \vec{B}

8. Relation de passage pour \vec{E}

L'écriture de MG et MF donne $\Delta \vec{E} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$.

Exemple :

9. Relation de passage pour \vec{B}

L'écriture de MA et M-flux donne $\Delta\vec{B} = \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0\vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\rightarrow 2}$.

Exemple :

10. APPROXIMATION DES REGIMES QUASI STATIONNAIRES

On peut écrire $\frac{j_D}{j_e} = \frac{\epsilon_0\omega}{\gamma}$.

**Approximation A.R.Q.S.**

Les quatre équations de Maxwell se simplifient un peu dans ce cas. Cela correspond à ne garder dans les équations que les termes du même ordre.

On a $\frac{j_D}{j_e} = \frac{\epsilon_0\omega}{\gamma}$ qui reste petit des fréquences des ondes électriques jusqu'aux ondes lumineuses.

On aboutit en A.E.Q.S. à deux propriétés :

- \vec{B} se calcule comme en magnétostatique
- on conserve la loi des noeuds

11. Equation de POISSON en Statique

A l'aide des équations de Maxwell, on peut écrire un lien entre le potentiel V et les charges :



Approche descriptive et numérique

En partant des équations de M.G. et M.F., on peut écrire que $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ en Statique

12. Equation de LAPLACE en Statique

A l'aide des équations de Maxwell, on peut écrire une relation importante pour le potentiel V dans un milieu vide de charges :



Approche descriptive et numérique

En partant de l'équation de Poisson en Statique, on peut écrire que $\Delta V = 0$ en Statique pour un milieu vide de charges

13. A.R.Q.S. et phénomène d'induction



Les quatre équations de Maxwell dans l'A.R.Q.S.

Celles-ci s'écrivent :

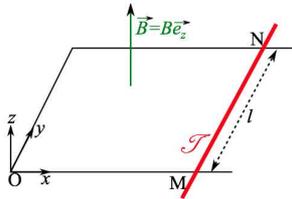
$div \vec{B} = 0$	M. T.
$\vec{rot} \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$	M.F.
$div \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	M.G.
$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_e$	M.A.

13. 1 **Loi de LENZ** : loi dite de "modération"

Les phénomènes d'induction s'opposent par leurs effets aux causes qui leur ont donné naissance

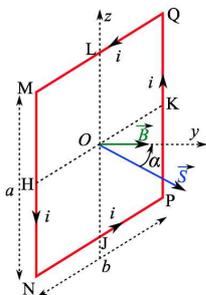
1) EXEMPLE d'une **bobine** d'induction : tension u_L et fem induite

2) EXEMPLE des **rails de Laplace** : prévision du sens de la force de Laplace



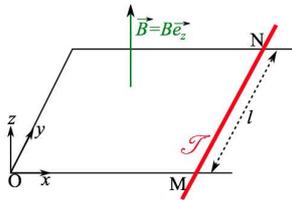
13. 2 **Loi de FARADAY** : circuit fixe soumis à $\vec{B}(t)$ variable : on applique la loi de la fem $e = -\frac{d\Phi}{dt}$

1) Cas de la spire soumise à un champ \vec{B} tournant : calcul de la fem induite e



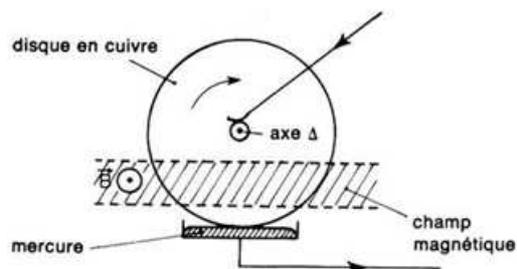
Application : force de Laplace, moment de la force de Laplace, en notant \vec{m} le moment dipolaire magnétique de la spire, $\vec{M}_{axe} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, vu en 1ère année le rôle moteur du champ magnétique tournant. Cela sera revu dans le chapitre sur les moteurs.

2) EXEMPLE des rails de Laplace soumis à un champ variable $\vec{B}(t)$: détermination de e et i induits, résolution temporelle et détermination de la force \vec{F}_o nécessaire à rendre fixe la barre



13. 3 Exception à la loi de Faraday

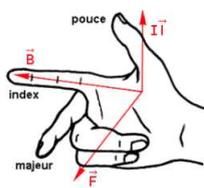
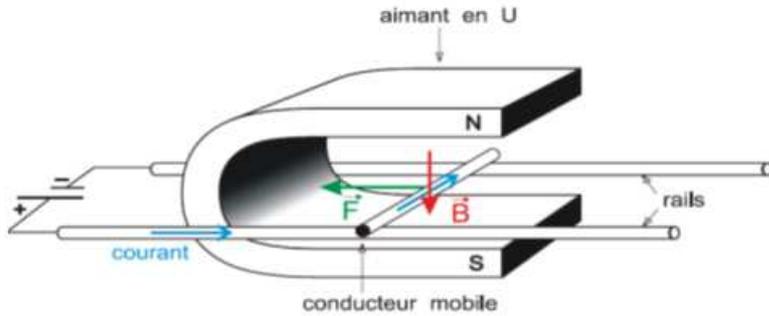
Cas de la **roue de Barlow**



13. 4 **Loi de FARADAY, circuit mobile dans un champ \vec{B} uniforme** : retour au cas des rails de Laplace

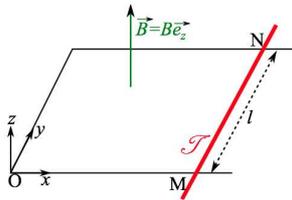
L'expression $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ peut être utilisée encore ici à la condition d'avoir :

- un flux défini à travers le circuit
- le circuit mobile coupe les lignes de champ magnétique au cours de son déplacement



Main droite

1) sens de la fem induite, sens du courant induit



2) résolution temporelle du déplacement de la barre

2-1) Cas où le générateur est éteint, et la barre lancée avec $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$

2-2) Cas où le générateur est allumé, et la barre laissée sans vitesse initiale $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$

13. 5 Cas général

14. Energie électromagnétique

Le champ magnétique peut échanger de l'énergie avec des particules chargées au travers de la force de Lorentz $\vec{f} = q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$. Si les champs \vec{E} et \vec{B} sont "mobiles" dans l'espace, ils "transportent" donc une énergie magnétique susceptible d'être ensuite échangée avec la matière. On définit alors, à partir de la définition $P = \vec{f} \cdot \vec{v}$, la puissance volumique échangée avec les charges : $p_V = \frac{dP}{dV} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ ("effet Joule")

Les bilans d'énergie seront vus au chapitre suivant