

Calculs de champs électriques \vec{E}

Introduction : nous allons tout d'abord rappeler ce qui constitue la base de l'étude des champs électrique, i-e la nature des sources de \vec{E} . Il s'agit des charges électriques. Puis nous verrons que le calcul du champ \vec{E} créé pourra se faire de diverses manières, afin de rendre les calculs les plus simples possibles.

Partie I: Notion de charge électrique

I.1 Electrification

I.1-1 Cas des isolants

Dans le cas d'un isolant, les charges sont immobilisées à l'endroit où elles sont déposées ou créées. L'apparition de ces charges peut être obtenu par les méthodes suivantes

par frottement : On parle alors de triboélectricité (du grec $\tau\rho\iota\beta\epsilon\iota\nu$ = *tribein* qui signifie "frotter"). Voir les expériences de cours qui consistent à frotter du verre ou de l'ébonite par un textile ou un pelage. Un pendule léger en sureau est influencé par les charges présentes sur le bâton : le pendule par influence (voir plus loin) et le mouvement ultérieur est induit par les forces de Coulomb entre charges (attraction pour des charges de signes différents et répulsion dans le cas contraire).

par contact : la partie métallique d'un électroscope peut être chargée par contact avec un bâton chargé et cette charge se répartit partout dans le métal, même après avoir cessé le contact.

par influence : l'effet visuel est le même que précédemment pour l'électroscope, mais on ne met pas en contact le bâton avec la partie métallique. L'effet cesse quand on éloigne le bâton.

par effet électrique de déplacement de charges : effet photoélectrique ou thermoélectrique ou piézoélectrique

I.1-2 Répartition sur des conducteurs

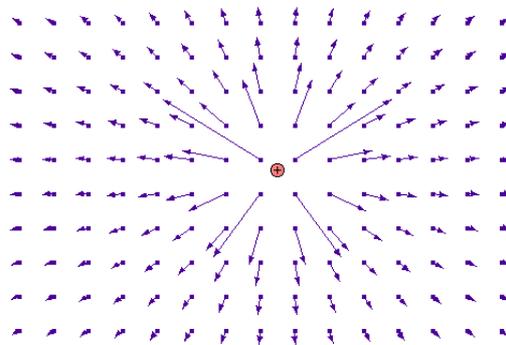
Comme il a été vu précédemment, les charges se répartissent dans le volume du conducteur chargé. On peut le mettre en évidence également en chargeant une cage métallique.

I.1-3 Visualisations de lignes de champ

Pour mieux comprendre les actions à distance de charges sur d'autres, on définira un "champ \vec{E} " qui permettra de faire un lien avec les forces qui s'exercent entre charges.

En plaçant des petites particules qui peuvent être influencées par un "champ" extérieur (comme pour le cas du champ de gravitation \vec{g} , ici par exemple créé entre les armatures d'un condensateur), on distingue des directions privilégiées qui sont localement celles d'un vecteur champ électrique noté \vec{E} et constituent des lignes dites "de champ".

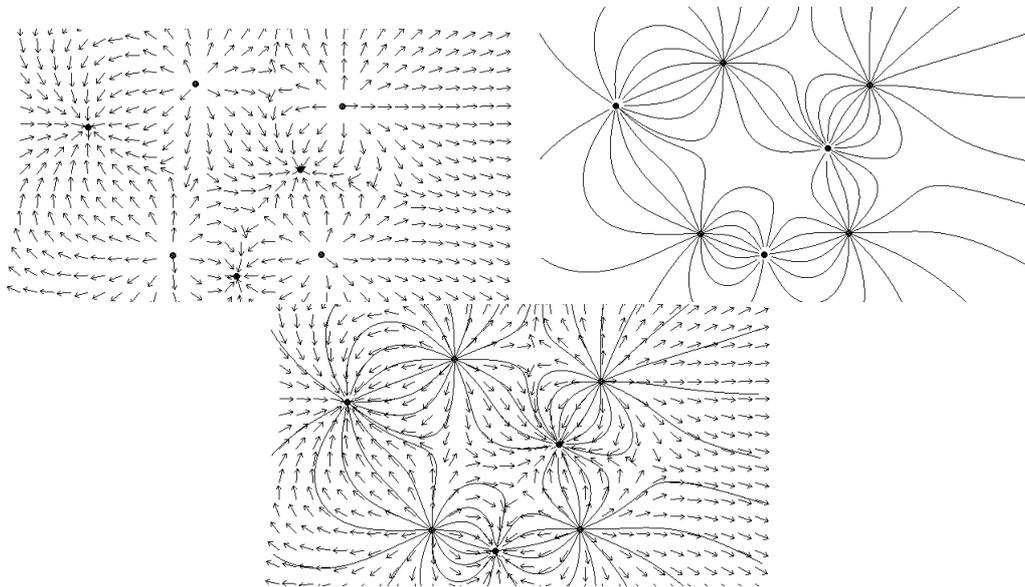
Un champ est une grandeur physique scalaire ou vectorielle qui est définie en tout point de l'espace à chaque instant t : par exemple ici $\vec{E}(x, y, z)$, avec un tracé en divers points d'un plan, ce qui permet de visualiser le vecteur \vec{E} en ces différents points. On représentera maintenant souvent ce genre de tracé vectoriel dans un plan (électrostatique, magnétostatique, mécanique des fluides, diffusion de particules, ...



Les situations sont rapidement complexes. On peut donner sous forme de photo la visualisation de lignes de champ \vec{E} grâce à des petites particules, par exemple pour un condensateur plan.



On pourra préférer tracer des "lignes de champ" qui sont localement tangentes aux vecteurs \vec{E} .



I.2 Charge électrique élémentaire

I.2-1 historique

Les premières expériences datent de 1785 avec COULOMB. La découverte des particules élémentaires chargées a été réalisée par Thomson en 1881.

I.2-2 Propriétés

Les propriétés des charges sont :

deux signes

extensivité = additivité des charges pour un ensemble

conservation de la charge

quantification de la charge : expériences de Millikan en 1910 ; la charge élémentaire est $q_e = +1,6021 \cdot 10^{-19} C$.

La charge du proton et de l'électron sont opposées. La masse de l'électron est $m_e = 0,91091 \cdot 10^{-30} kg$ et la masse du proton est $m_p = 1,6725 \cdot 10^{-27} kg$. On découvrira en 1964 que les protons et neutrons par exemple (mais pas l'électron qui reste une particule élémentaire) sont constitués par trois particules élémentaires, les quarks, dont la charge est donc fractionnaire de q_e .

invariance de q_e

I.3 Répartition des charges

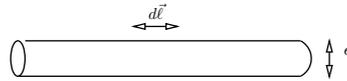
Si la charge est de dimension petite devant celle de l'objet chargé, on parlera, pour décrire la répartition des charges, de "distribution de charges".

I.3-1 isolants :

on a dit que la charge est fixe au point où elle est située.

I.3-2 distribution "discrète" :

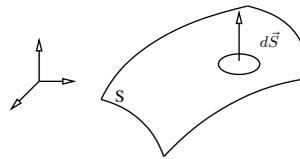
il s'agit d'un ensemble de points "disjoints" chargés et $Q = \sum_{i=1}^N q_i$

I.3-3 distribution linéique

La distribution correspond à $e \gg L$ la longueur du "fil", donc la charge d'une longueur élémentaire dl est $\delta q = \lambda dl$ avec λ la charge linéique sur le corps chargé. La charge totale est donc $Q = \int_{fil} \lambda dl$.

I.3-4 distribution surfacique

Soit σ la charge surfacique sur le corps chargé. La charge élémentaire sur la surface d^2S est $\delta^2 q = \sigma d^2S$ et la charge totale est $Q = \iint_S \sigma d^2S$.



Prenons l'exemple de la surface d'une sphère : on peut calculer (en prenant les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et une densité surfacique σ_0 constante) la charge uniforme placée à la surface d'une sphère de rayon R . On en déduit que $Q = 4\pi R^2 \sigma_0$.

I.3-5 distribution volumique

Dans le cas d'une distribution volumique de charges, un petit volume dV contient une charge élémentaire $\delta^3 q = \rho d^3V$ avec ρ la densité volumique de charges. Ce volumique d^3V peut s'écrire $dx dy dz$ ou $dr r d\theta dz$ ou $r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$ par exemple et $Q = \iiint_V \rho d^3V$.

Partie II: Expression de la loi de Coulomb**II.1 Interaction**

Il existe à ce jour diverses interactions :

nucléaire : l'interaction forte (dans les noyaux) entre p et n (hadrons)

l'interaction faible (pour "faible probabilité") qui régit l'instabilité des noyaux ou particules (choc $P + n$ stable mais $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ de temps de stabilité $t = 932$ s).

gravitation : longue portée, en $1/r^2$, attractive

électromagnétique : la force magnétique est environ 10^{40} fois plus forte que la force de gravitation, mais la matière étant globalement neutre à grande distance, on perçoit en fait plus l'effet de la gravitation. La force électromagnétique intervient dans la cohésion, l'élasticité, les chocs, les frottements, donc en général en physique, en chimie, en biologie, en biochimie.

II.2 Postulat fondamental (1780)

II.2-1 introduction

L'expérience de Coulomb a permis de fixer comme POSTULAT de base, dans le vide, une expression de l'interaction entre deux charges q_1 et q_2 sous la forme :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} \quad (1)$$

La fraction initiale $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ a été mesurée égale à $8,987 \cdot 10^9$ avec $\epsilon_0 = 8,853 \cdot 10^{-12} S.I.$ la permittivité du vide.

II.2-2 interprétations

On peut faire une analogie avec la mécanique.

II.2-3 rôle du milieu

Lorsque les charges sont dans un "milieu" qualifié de "diélectrique", on remplace ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \times \epsilon_r$.
 $\epsilon_r(\text{air}) = 1,0006$ $\epsilon_r(\text{eau}) = 80$ (qui explique la dissolution des cristaux dans l'eau) $\epsilon_r(\text{NH}_3) = 22$.

Partie III: Etude du champ électrique E

III.1 Principe de superposition

Pour deux charges q_1 et q_2 créant en q_0 une force \vec{F} , elle vérifie $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

III.2 Définition de \vec{E}

charge ponctuelle : le rapport $\frac{\vec{F}}{q}$ reste le même quand on change la charge q en M_2 qui subit l'action d'une charge q_0 en M_1 . On parle alors de champ électrique \vec{E} . Avec $r = M_1 M_2$,

$$\vec{E}_{M_2} = \frac{q_0(M_1)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2} \quad (2)$$

Si l'on place une charge q en M_2 , elle ressent une force $\vec{f} = q\vec{E}$.

charges ponctuelles : Pour une somme de charges q_i créant un champ \vec{E} on a $\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \frac{\overrightarrow{M_i M}}{M_i M}$

distribution linéique de charges : $\vec{E}(M) = \int_A^B \frac{\lambda(P) dl \overrightarrow{PM}}{4\pi\epsilon_0 r^2 PM}$

distribution surfacique de charges : $\vec{E}(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)d^2S}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$

distribution volumique de charges : $\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)d^3V}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{PM}}{PM}$

III.3 Propriété de "circulation"

III.3-1 charge ponctuelle

On montre qu'un point M se déplaçant sur une courbe AB, soumis au champ E créé par un point O de charge q (on note $\vec{r} = \vec{OM}$ et $d\vec{\ell}(P)$ un petit déplacement sur AB autour de P, qui est l'une des positions de M, de charge $\delta q = \lambda d\ell$). La figure correspondant est la Fig-1 à la page 5.

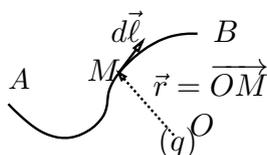


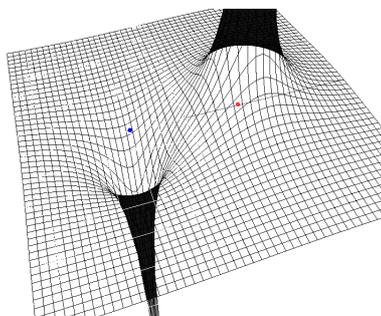
FIGURE 1 – Circulation du champ \vec{E} créé par la charge q

On peut fabriquer le terme de "circulation" qui correspond au déplacement du point M (attention : en M, il n'y a pas (encore) de charge électrique; la charge est fixe en O). $dC = \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \cdot d\vec{\ell}$ avec $\vec{u} = \vec{r}/r$. On a donc $d\vec{\ell} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques donne (car $\vec{u} \cdot d\vec{\ell} = dr$) $dC = \frac{q \cdot dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$. On remarque que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$

III.3-2 notion de potentiel électrique

On pose $dC = -dV$. Le terme V est le "potentiel électrostatique" (ou plus généralement le "potentiel électrique") dont l'unité est le volt (V).

Il faut comprendre que le potentiel est lié à la notion de graphique en 3D :



III.3-3 Tracé des lignes de champ LDC et des isopotentiels

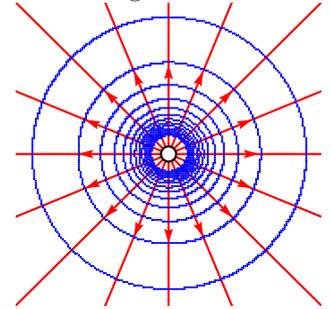
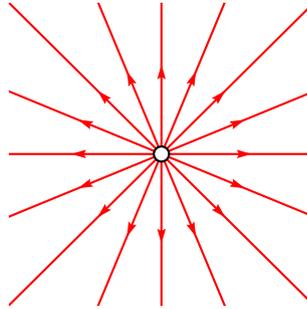
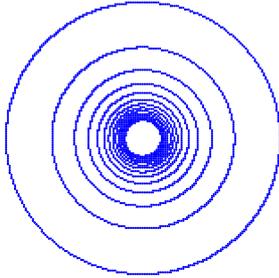
1. Cas d'une charge

Le potentiel est calculable pour une charge qui crée un champ $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ car $dC = -d\left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$ donc $V(r) = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}\right) + cste.$

Choix de la constante d'intégration : le choix se résume à deux cas : si l'on peut s'éloigner à l'infini de la distribution de charges, on impose $V(r \rightarrow \infty) = 0$, et si l'on a des charges à l'infini, on impose le $V = 0$ sur un axe de symétrie.

Ici, le choix $V(r \rightarrow \infty) = 0$ impose que la constante est nulle, donc $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Les courbes isoV dans un plan correspondent donc à des cercles concentriques centrés sur la charge.

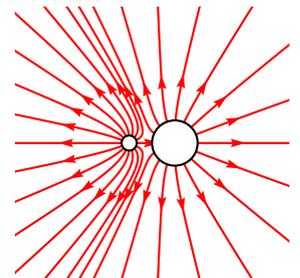
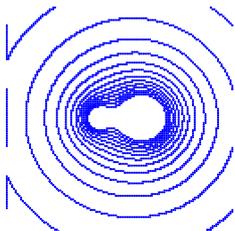


On remarque que les LDC sont orientées :

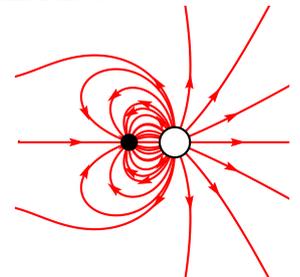
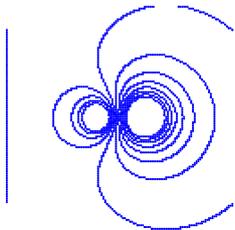
On remarque que pour les tracer, on a les LDC qui sont localement orthogonales aux isoV.

2. Cas de deux charges

Dans le cas de charges quelconques, pour une charge $+3e$ et $+e$, on a des tracés qui ressemblent à :



Dans le cas de charges quelconques, pour une charge $+2e$ et $-e$, on a des tracés qui ressemblent à :



III.3-4 relation entre \vec{E} et V

La définition de la circulation permet d'écrire la "relation locale" sous la forme

$$\boxed{\vec{E}_M = -\overrightarrow{\text{grad}} V} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\text{grad}} \psi(r, \theta, z) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\vec{\text{grad}} \psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Remarquons que \vec{E} est orienté dans le sens des potentiels décroissants.

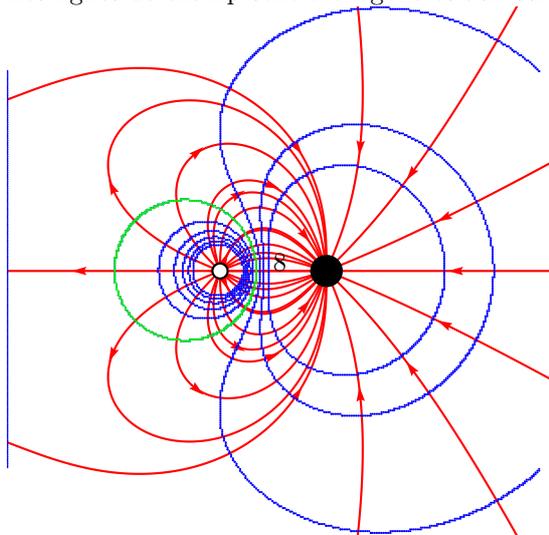
⚠ Ligne de champ

Elle est orientée localement dans le sens de tous les vecteurs \vec{E} auxquels elle est tangente. On peut écrire l'équation d'une LDC en écrivant que le $d\vec{\ell}$ sur la LDC est colinéaire à \vec{E} , ou plus simplement que $\vec{E} \wedge d\vec{\ell} = \vec{0}$

⚠ Equipotentielle

↗ C'est une **surface** correspondant à l'équation $V = cste$

Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au vecteur \vec{E} défini en ce point. Les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles.



III.4 Equation de Maxwell-Faraday

Les relations entre opérateurs montrent que $\vec{E}_M = -\vec{\text{grad}} V$ correspond à l'équation $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ dans le cas statique que nous étudions.

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{V} &= \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \\ \vec{\text{rot}} \vec{A}(r, \theta, z) &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \\ \vec{\text{rot}} \vec{A}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

Partie IV: Calculs de \vec{E}

IV.1 Méthodes

méthode directe : on utilise $\vec{E}(M) = \int \int \int_V \frac{\rho(P)dV}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ par exemple pour un volume ; reste à effectuer le calcul : attention, le vecteur $\frac{\overrightarrow{PM}}{PM}$ est "mobile" et ne doit pas être sorti de l'intégrale trop vite. Cette méthode est très calculatoire.

méthode indirecte : on calcule le potentiel $V(M)$ puis on utilise $\vec{E}_M = -\overrightarrow{\text{grad}} V$

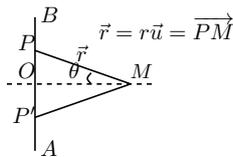
théorème de GAUSS : on verra dans le chapitre spécifique ce théorème simplificateur qui permettra de mener à bien ces calculs dans des cas simplifiés, mais sans trop d'efforts.

IV.2 Remarque concernant les symétries

Considérations de symétrie : "si une distribution de charge est invariante dans une transformation (rotation, translation), le champ \vec{E} créé par cette source est invariant par cette transformation". Vous représenterez sur un schéma les symétries, vous choisirez une charge δq (au voisinage d'un point P) et dessinerez le vecteur $d\vec{E}$ créé en M par δq (cela permet de mieux visualiser les symétries, les projections, ...)

IV.2-1 Cas d'un axe de symétrie

Voilà un exemple associé à l'utilisation des symétries :



On veut obtenir l'expression du champ \vec{E} en M dont l'origine est le segment chargé AB. Considérons un axe orthogonal au fil passant par O et M. O est choisi comme centre de AB pour le présent calcul. Soient P et P' deux points du fil symétriques par rapport à O. Leurs voisinages sont choisis pour regrouper une même charge dq , pour un cas $\lambda = cste$ et $d\ell(P) = d\ell'(P')$.

Le champ créé par $d\ell$ est $d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2} \vec{u}$. De même pour le champ $d\vec{E}'$ créé en M par $d\ell'$, $d\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r'^2} \vec{u}'$. Donc le champ élémentaire créé par les deux charges dq et dq' est la somme des deux vecteurs précédents : $d\vec{E}_{Tot} = d\vec{E} + d\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda d\ell}{r^2} (\vec{u} + \vec{u}')$. On remarque, si l'on oriente des axes x et y tels que $\overrightarrow{OM} = OM\vec{u}_x$ et $\overrightarrow{AB} = AB\vec{u}_y$, que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \cos \theta \vec{u}_x - \sin \theta \vec{u}_y \\ \vec{u}' &= \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \end{aligned}$$

En conclusion, le champ $d\vec{E}_{Tot}$ est dirigé seulement suivant \vec{u}_x . L'avantage de ce résultat est que le vecteur \vec{u}_x est un vecteur "fixe" et, en intégrant sur la position de P et P' sur le fil (donc en faisant varier y) $\int_y f(y)\vec{u}_x dy = \left(\int_y f(y) dy\right)\vec{u}_x$: le calcul intégral devient scalaire standard.

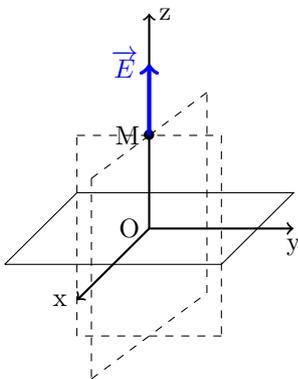
On dégage donc la notion de symétrie suivante : le point M est situé sur un axe de symétrie du segment chargé AB. Le champ \vec{E}_{tot} appartient à cet axe portant \vec{u}_x . On peut donc se permettre de ne pas projeter $d\vec{E}$ sur les trois axes (x, y, z) , mais seulement sur un axe (x) car on SAIT que les deux autres composantes sont nulles.

IV.2-2 Influence des symétries

Le résumé du point détaillé précédemment dans IV.2-1 est le principe de CURIE :

"une distribution de charge possédant des symétries ou invariances par rapport à la position géométrique de ses charges crée un champ \vec{E} possédant le même type de symétries ou invariances."

- s'il y a invariance des sources par translation le long d'un axe des z par exemple, alors le champ $\vec{E}(x, y, z)$ est en fait indépendant de z : $\vec{E} = \vec{E}(x, y)$.
- 'il y a invariance des sources par rotation autour d'un axe des z par rotation d'un angle θ par exemple, alors le champ $\vec{E}(r, \theta, z)$ est en fait indépendant de θ : $\vec{E} = \vec{E}(r, z)$.
- s'il y a symétrie de la distribution de charges par rapport à un plan, en tout point M de ce plan, le champ $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan.



Direction de \vec{E} influencée par les symétries

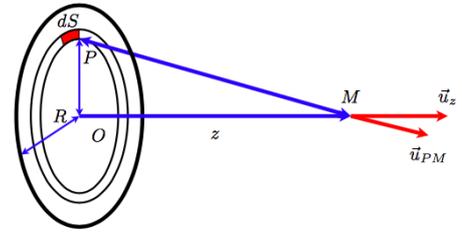
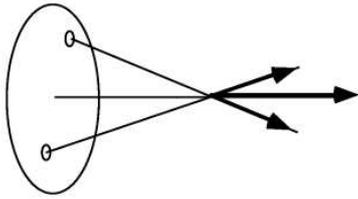
Le champ $\vec{E}(M)$ en un point M appartient à tous les plans de symétrie de la distribution de charges passant par M.

? Exercice 1: Exemple d'un disque de rayon R chargé uniformément avec une densité surfacique de charge σ

: un axe des z est normal au plan contenant le disque. On cherche le champ E en un point M de l'axe z.

On aboutit à $\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z$

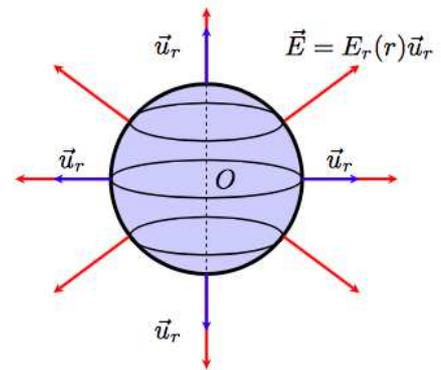
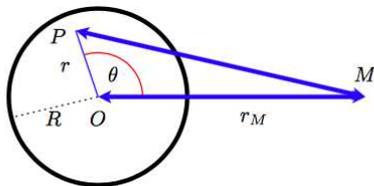




? Exercice 2: Exemple d'une sphère de rayon R chargée uniformément avec une densité volumique de charge ρ

les coordonnées sont (r, θ, ϕ) . On cherche le champ E créé en un point M quelconque de l'espace.

On aboutit à $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.



Partie V: Calculs de \vec{E} par le théorème de GAUSS

⚠ Enoncé du théorème de GAUSS

On peut trouver une relation entre le champ $\vec{E}(M)$ en un point M et la charge q_{int} située à l'intérieur d'une surface fermée passant par M :

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d^2\vec{S}_G = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \stackrel{Gauss}{=} E(M) \times S$$

V.1 Cas d'une charge ponctuelle à l'intérieur d'une surface de Gauss

On part de $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$ et on prend une sphère comme surface fermée. On place la charge au centre O.

On admet que le résultat reste valable quand la charge est ailleurs qu'au centre.

V.2 Cas d'une charge ponctuelle à l'extérieur d'une surface de Gauss

Dans ce cas, le flux sortant de la surface fermée est rigoureusement nul.

V.3 Cas d'une distribution quelconque de charges

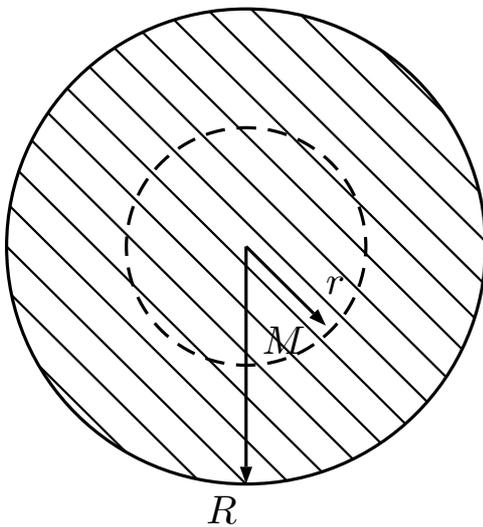
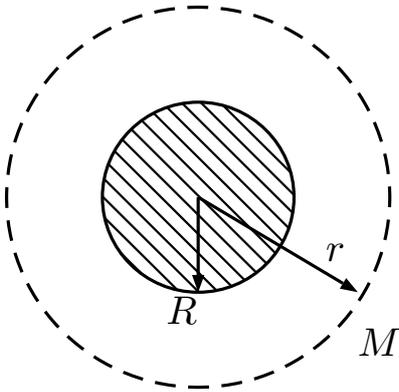
On aboutit au théorème sans effort en séparant le cas des charges q_{int} intérieures à la surface fermée, du cas des charges q_{ext} extérieures.

V.4 Cas d'une distribution : sphère de rayon R chargée σ en surface



Méthode de résolution par le théorème de GAUSS

- Trouver les dépendances et la direction du \vec{E} recherché grâce aux invariances et symétries
- Choisir la surface de Gauss
- Appliquer $\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d^2\vec{S}_G = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \stackrel{Gauss}{=} E(M) \times S$



V.5 Justification par les équations locales : équation de MAXWELL-GAUSS



Écriture locale du théorème de GAUSS

L'écriture "locale" avec les opérateurs est $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$.

On utilise les propriétés vectorielles et intégrales des opérateurs.

Formule de Green-Ostrogradski

Soit \mathcal{S} une surface fermée orientée par sa normale extérieure et

\mathcal{V} le volume limité par \mathcal{S} . Alors

$$\iint_{\mathcal{S} \text{ fermée}} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{F} dV$$

V.6 Intersection de lignes de champ

Deux cas possibles :

- là où il y a des charges, on peut croire que des LDC se croisent, mais en fait, ce sont des courbes qui divergent en ce point où $E \rightarrow \infty$.
- là où des LDC se coupent en l'absence de charges, cela signifie que $\vec{E} = \vec{0}$

V.7 Energie potentielle

Comme $\vec{F} = q\vec{E}$, on a donc $\boxed{\mathcal{E} = qV}$

V.8 Conservation du flux dans une zone vide de charges

On utilise l'équation de Maxwell-Gauss $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ici. On montre donc que les flux entrant et sortant d'un tube de champ sont égaux en valeur absolue donc $E_1 S_1 = E_2 S_2$. On peut donc en conclure que la norme du champ électrique augmente là où les LDC se resserrent.

V.9 Equations de Poisson et de Laplace

Pour les résolutions numériques, on utilise beaucoup l'équation combinée de Maxwell-Gauss

et de $\vec{E} = -\vec{grad}V$: $\boxed{\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$ et dans les zones vides de charges $\boxed{\Delta V = 0}$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

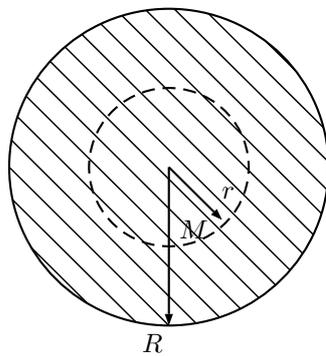
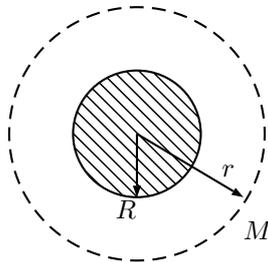
$$\Delta \psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi)$$

? Exercice 3: Cas d'une distribution : sphère de rayon R chargée ρ en volume

Description du champ \vec{E} :

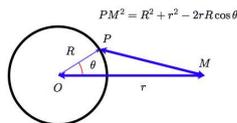
Deux cas à distinguer :

- à l'extérieur de la sphère, $E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$
- à l'intérieur, $E(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$



On échappe ainsi au calcul direct un peu plus complexe à mener :

Calcul du potentiel électrique :



Calcul du champ électrique :

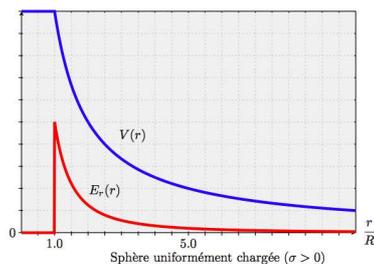
$$\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u}_r = -\frac{dV}{dr}(r)\vec{u}_r$$

Il faut encore considérer deux cas :

- $\vec{E}(r \leq R) = \vec{0}$
- $\vec{E}(r \geq R) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

Résultats :

Comme prévu, le champ électrique (sa composante normale en fait) est discontinu à la traversée de la sphère chargée.



A l'extérieur de la distribution à symétrie sphérique, champ et potentiel sont ceux d'une charge ponctuelle qui serait centrée sur la distribution et qui porterait sa charge totale $q = 4\pi R^2\sigma$.

$$V(M) = V(r) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{dS}{PM}$$

Si la sphère est de centre O , le point P est repéré par ses coordonnées sphériques $(r = R, \theta, \phi)$:

$$V(r) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta}} = \frac{R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta}} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$V(r) = \frac{2\pi R^2\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta}} = \frac{2\pi R\sigma}{4\pi\epsilon_0 r} [\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos\theta}]_0^{\pi} = \frac{2\pi R\sigma}{4\pi\epsilon_0 r} (R + r - |R - r|)$$

Il faut alors considérer deux cas :

- $V(r \leq R) = \frac{R\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = cst.$
- $V(r \geq R) = \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

$V(r \leq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = cst.$	$\vec{E}(r \leq R) = \vec{0}$
$V(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$	$\vec{E}(r \geq R) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

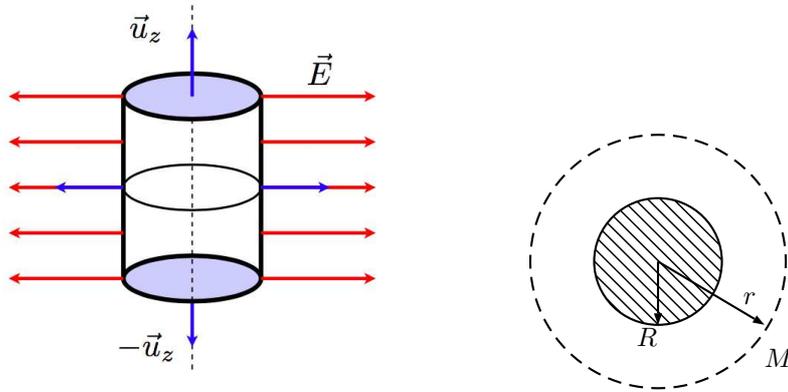
? Exercice 4: Cas d'une distribution : cylindre infini de rayon R chargé σ en surface

Description du champ \vec{E} :

ATTENTION à la surface de GAUSS qui doit être FERMEE.

Deux cas à distinguer :

- à l'extérieur de la sphère, $E(r \geq R) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 r}$
- à l'intérieur, $E(r \leq R) = 0$

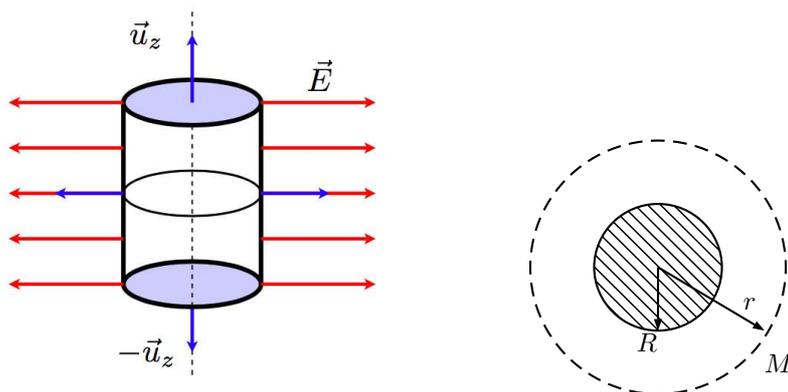


? Exercice 5: Cas d'une distribution : cylindre infini chargé en volume

Description du champ \vec{E} :

Deux cas à distinguer :

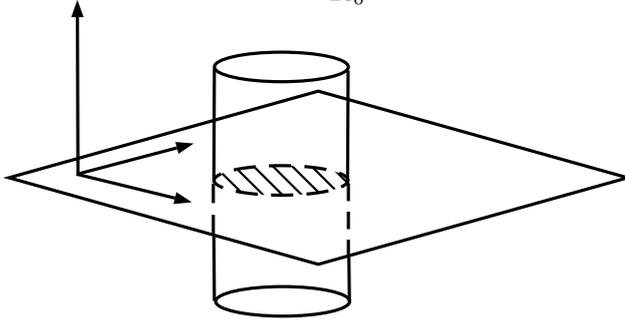
- à l'extérieur du cylindre, $E(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$
- à l'intérieur, $E(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$



? Exercice 6: Cas d'une distribution : plan infini chargé σ en surface

Description du champ \vec{E} :

Le champ est donc $\vec{E}(z) = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$



Partie VI: Analogie avec le champ de gravitation \vec{g}

VI.1 Tableau de correspondances

On cherche le plus souvent à appliquer cette remarque à des corps sphériques de masse m : $\vec{g} \Leftrightarrow \vec{E}$, $m_{int} \Leftrightarrow q_{int}$ et $1/4\pi\epsilon_0 \Leftrightarrow -4\pi\mathcal{G}$

VI.2 Enoncé du théorème

$$\oiint_{S_G} \vec{g} \cdot d^2\vec{S}_G = -4\pi\mathcal{G}m_{int} \stackrel{Gauss}{=} g(M) \times S$$

