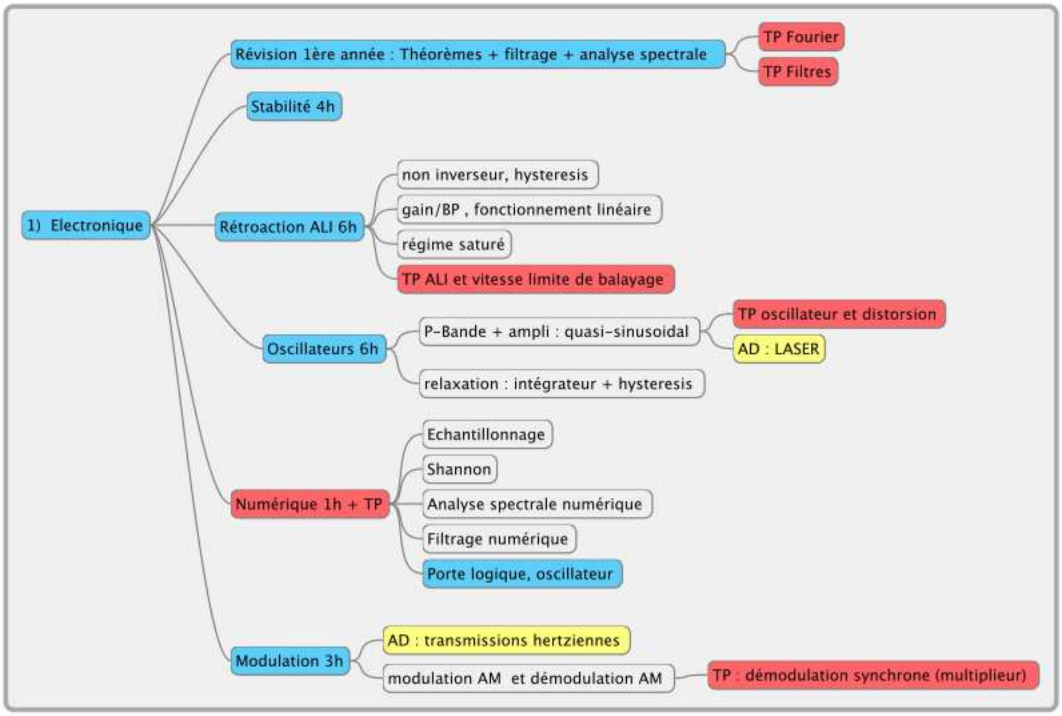
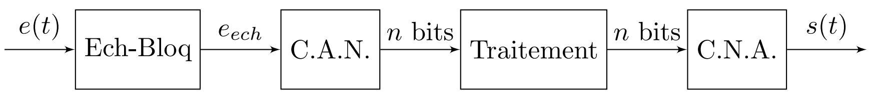
Traitement d'un signal



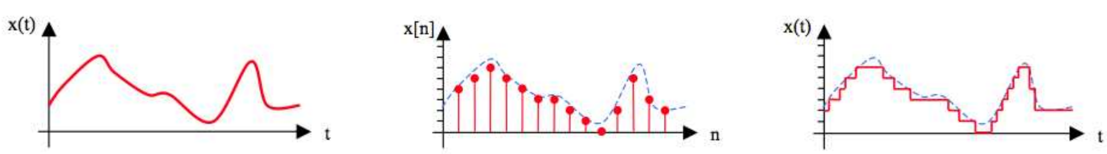
1. Introduction : chaîne d'acquisition des données

1. 1 Principe



1. 2 Présentation des fonctions

Echantillonneur ou Echantillonneur- Bloqueur : Le traitement de ce signal devant être numérique (calcul sur des nombres finis), et le calculateur ne pouvant traiter une infinité de valeurs, un nombre limité de ces valeurs seront prélevées, c'est l'opération d'échantillonnage. La durée entre deux échantillons, appelée période d'échantillonnage T_e, doit être supérieure à la durée d'exécution du processeur et inférieure à une durée qui dépendra de la précision désirée en fonction de la rapidité d'évolution du signal analogique.



Convertisseur Analogique-Numérique : (ADC en anglais, pour analog to digital converter) La conversion CAN consiste en la transformation d'une grandeur analogique représentée par un nombre réel en une grandeur numérique représentée par un nombre binaire de n bits pouvant prendre 2^n valeurs différentes.

Les nombres sont par exemple codés sur 8bits selon la représentation 00101011 où chaque bit est stocké par une mémoire et avec une valeur 0 ou 1 qui correspond à 0 ou $+5V$.

Sur 2 bits, on a la succession de nombres depuis 0 jusqu'à 3 : 00 puis 01 puis 10 puis 11.

En notant e_{CC} la valeur crête à crête de la tension d'entrée échantillonnée, le pas de conversion P est donc $P = \dfrac{e_{CC}}{2^n}$ qui est le quantum de numérisation : l'intervalle le plus petit de $e(t)$ qui donne lieu à un changement de valeur numérique comme le passage de 00011010 à 00011011
Exemple : pour $n = 8$ et $e_{cc} = V_{ref} = 10V$ alors $P = 10/256 = 39mV$

Traitement numérique : On pourra réaliser les filtrages numériques (passe-bas, passe-haut, etc.) sur le signal discret échantillonné. L'intérêt majeur est de ne pas avoir à prévoir des composants pour réaliser le filtrage analogique, mais de concevoir simplement le calcul mathématique que devra réaliser le calculateur placé dans la zone de traitement.

Convertisseur Numérique-Analogique : Une fois le traitement numérique réalisé sur le signal discret échantillonné, on veut revenir à un signal analogique par un montage permettant de traduire le codage numérique comme 1011 en 4 bits selon la formule :

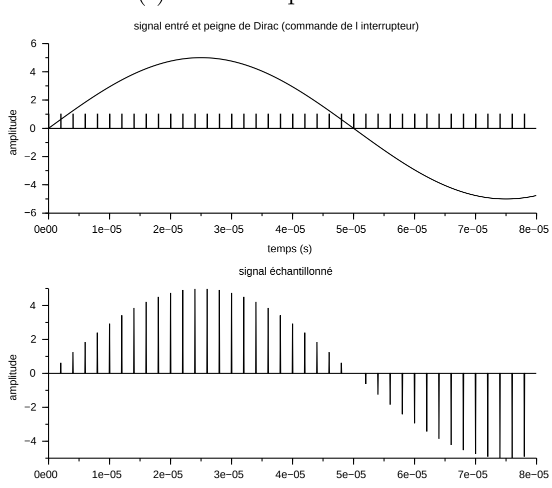
$$N = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$$

qui donne $s(t) = P \times N = \dfrac{e_{CC}}{2^n} \times \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \right)$

1. 3 Cas divers

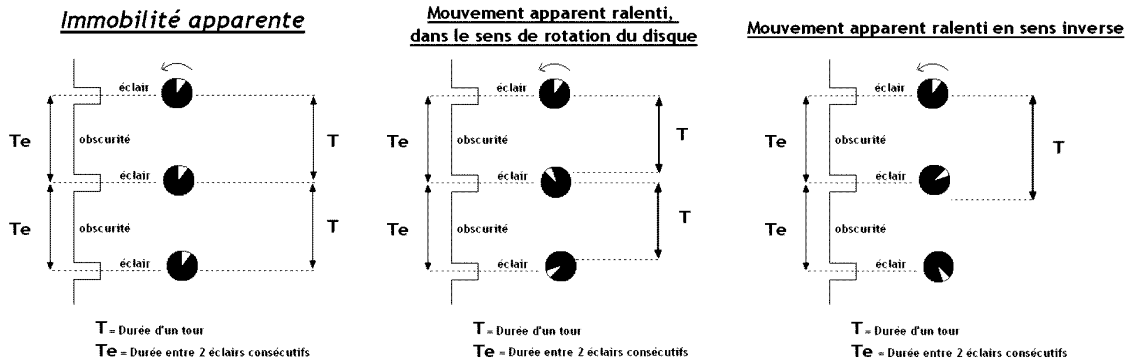
2. Echantillonnage

2. 1 **Principe** On va acquérir une valeur donnée de la tension présente en entrée à un instant donné. On recommence cette opération périodiquement à la fréquence d'échantillonnage f_e. On ne va donc garder que certaines valeurs de la tension $e(t)$ comme représenté sur le tracé ci-dessous réalisé avec **Scilab** :



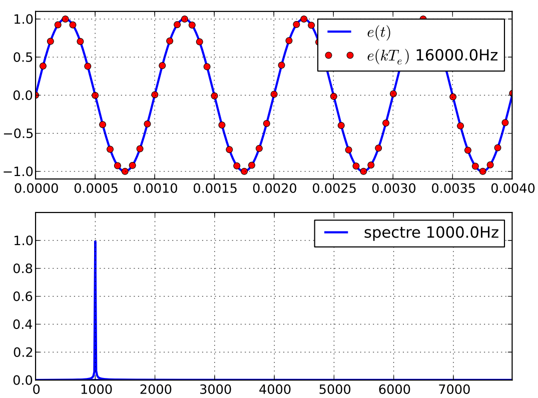
2. 2 Comparaison avec le principe stroboscopique

- `http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/delices/cinema/stroboscope.htm#quatre`
- `http://fr.wikipedia.org/wiki/Stroboscope`

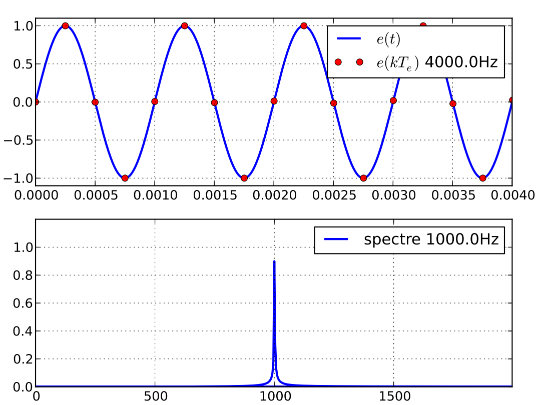


2. 3 Signaux obtenus

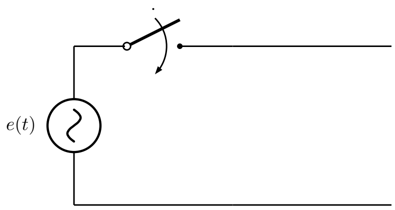
Cas d'un signal à $1\,kHz$ échantillonné à $16\,kHz$: on utilise en **Python** la fonction **FFT** de la bibliothèque **pylab**. L'acronyme FFT signifie Fast Fourier Transform, qui est une méthode mathématiquement donnée ici pour un échantillon de 1024 points échantillonnés et permettant de passer d'un signal temporel au spectre de Fourier.

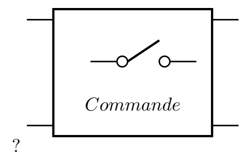


Cas d'un signal à $1\,kHz$ échantillonné à $4\,kHz$:



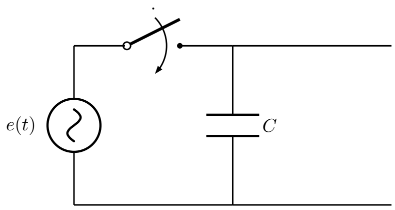
2. 4 Echantillonneur (Sampler)

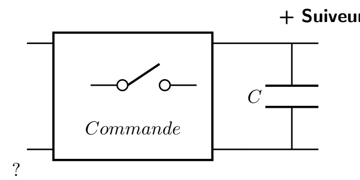




2. 5 **Echantillonneur-Bloqueur (Sample And Hold)**

Ce circuit maintient la grandeur analogique constante pendant la durée T_e.





Quand est-il nécessaire d'utiliser un bloqueur ?

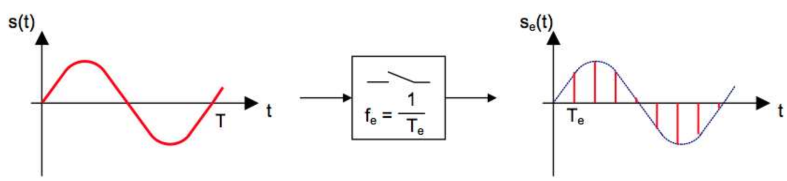
A une conversion sur n bits d'un signal $e(t) = E\cos\omega t$, avec $\omega = 2\pi f$, on associe une résolution $P = \dfrac{2E}{2^n}$ et un temps d'acquisition T_a.

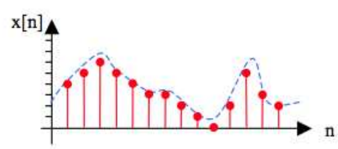
Si, pendant le temps T_a la variation de $e(t)$ est inférieure à la résolution, le bloqueur est inutile :

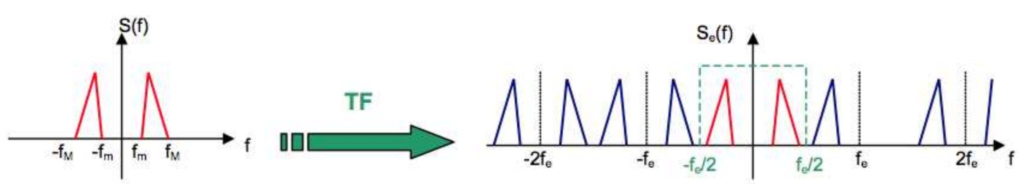
$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{max} \times T_A \leq \frac{2E}{2^n}$$

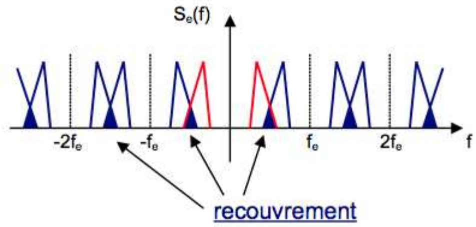
donc $f \leq \dfrac{1}{T_a\pi 2^n}$

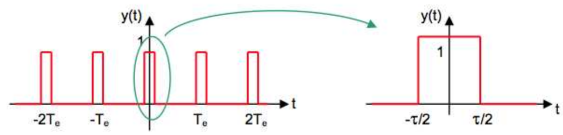
2. 6 **effets sur le spectre de Fourier**

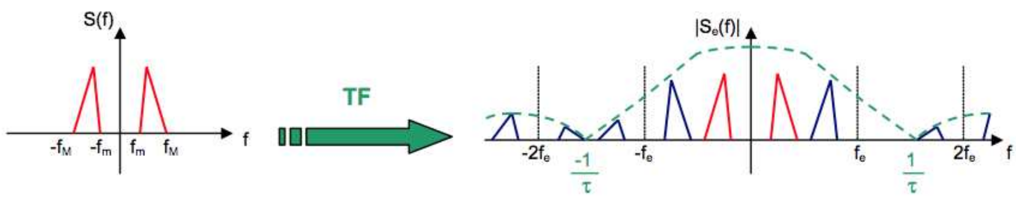


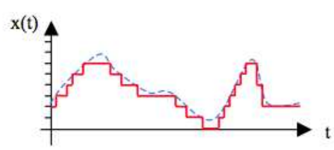










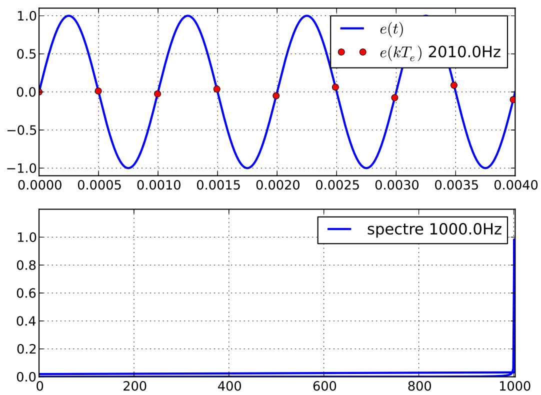


CONCLUSION : l'échantillonnage réel introduit, par découpage en impulsions rectangulaires, du signal analogique, une modification du spectre par modulation par une fonction sinus cardinal

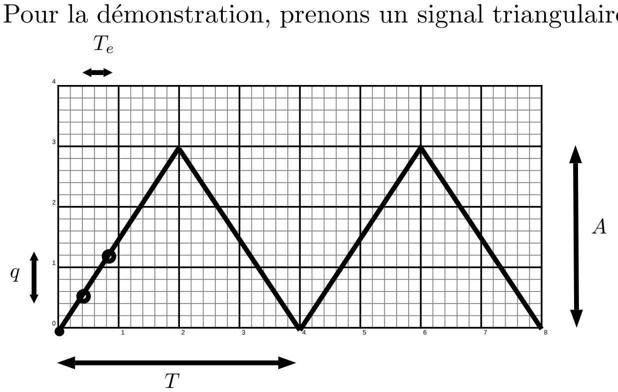
3. Critère de Shannon

3. 1 Fréquence minimale d'échantillonnage

Cas d'un signal à $1\,kHz$ échantillonné à $2,01\,kHz$:



Pour la démonstration, prenons un signal triangulaire :



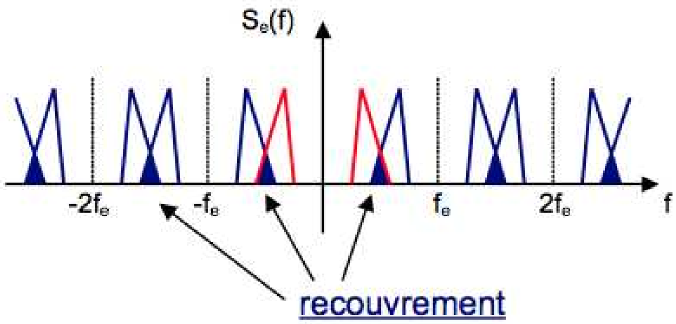
Le signal analogique varie de A par demi-période, donc à une vitesse $\dfrac{A}{T/2} = \dfrac{2A}{T}$. La vitesse de numérisation est la même donc c'est $\dfrac{q}{T_e}$ ce qui donne comme condition limite $\dfrac{q}{A} = \dfrac{2T_e}{T}$. Le nombre minimum de bits pour tenter de numériser est bien sûr $n = 1$ où $q = A$ donc on voit que $n \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{q}{A} \leq 1 \Leftrightarrow T \leq 2T_e \Leftrightarrow f \leq \dfrac{f_e}{2}$.

Thérorème de SHANNON

Le théorème de Shannon est donc que la fréquence d'échantillonnage f_e doit être au moins égale au double de la fréquence f du signal analogique : $f \leq \dfrac{f_e}{2}$ ou encore $f_e \geq 2.f$

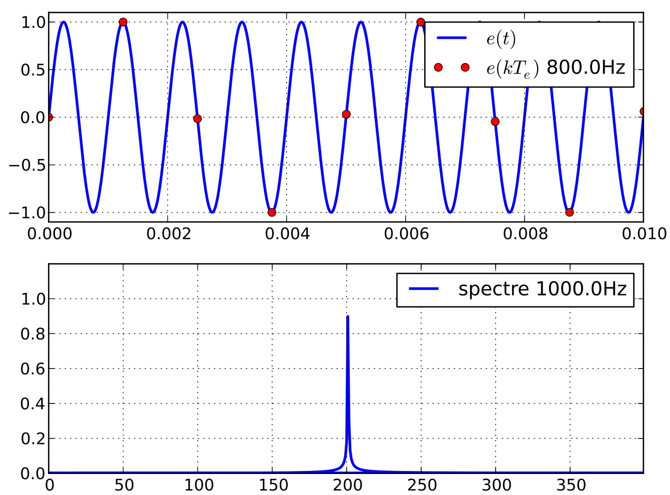
3. 2 Repliement de spectre

Remarquons que les tracés précédents de spectres couvraient l'intervalle $[0, \frac{f_e}{2}]$ du fait même de l'algorithme de calcul de la FFT qui a été utilisé informatiquement. Ainsi, quand on avait une fréquence d'échantillonnage de $4kHz$, l'axe des fréquences s'arrêtait à $2kHz$.
Que se passe-t-il quand on ne respecte pas ce critère de SHANNON ?

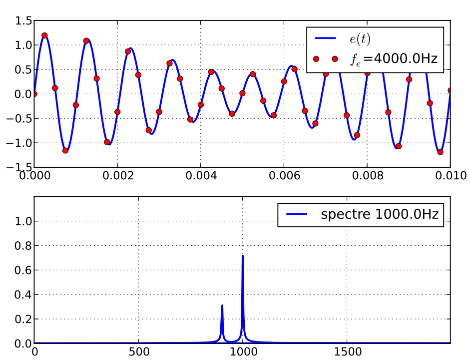


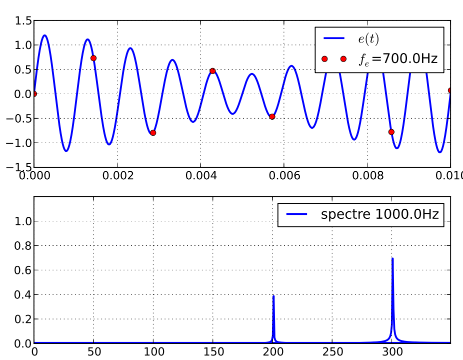
On tombe dans le cas d'un effet "stroboscopique" : au signal de fréquence f trop élevée par rapport à la fréquence d'échantillonnage f_e se substitue un signal de fréquence apparente plus basse, comme si les fréquences plus hautes étaient "repliées" par rapport à la fréquence $\frac{f_e}{2}$.

Etude du cas où $f = 1kHz$ et $f_e = 800Hz$:



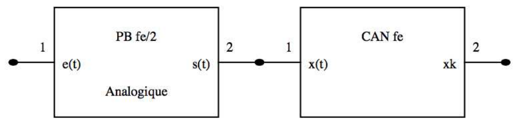
Cas d'un spectre de signal composé de deux fréquences : 900 et 1000Hz.

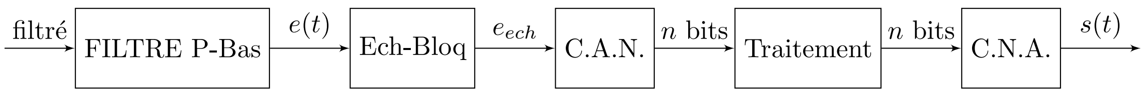




3. 3 Filtre anti-repliement (anti aliasing)

Pour éviter l'apparition dans le spectre entre 0 et $\dfrac{f_e}{2}$ de raies "parasites", on décide de filtrer par un filtre passe-bas toutes les fréquences supérieures à $\dfrac{f_e}{2}$. C'est le cas des systèmes usuels devant opérer une numérisation d'un signal. Ce filtre passe-bas est appelé "filtre anti-repliement"





3. 4 Choix de la fréquence d'échantillonnage

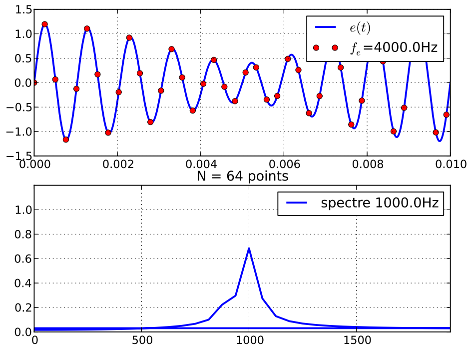
- en instrumentation : $n \geq 4$, soit $p \leq 1/15$, donc $f \leq \frac{f_e}{30}$.
- en audio : pour $f \leq 20$kHz (son Hi-Fi), $f_e = 44,1$kHz, $n = 16$bits
- en téléphonie : pour $f \leq 3400$Hz (voix humaine), $f_e = 8$kHz, $n = 8$bits.

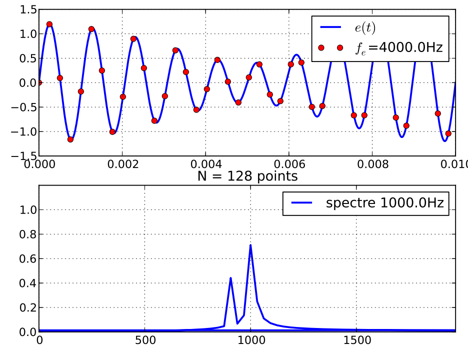
Les CD sont échantillonnés à 44kHz avec $n = 16$bits, les DVD à 48kHz avec $n = 24$bits.

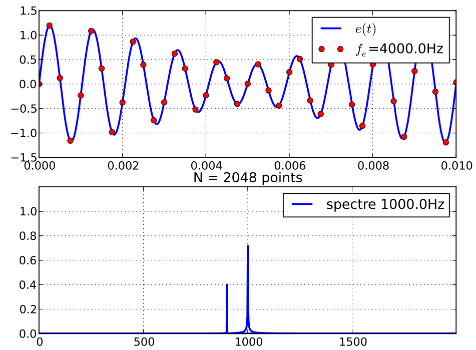
4. Analyse spectrale numérique

4. 1 Numérisation

Choix du nombre N de points :

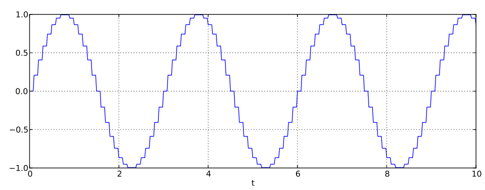


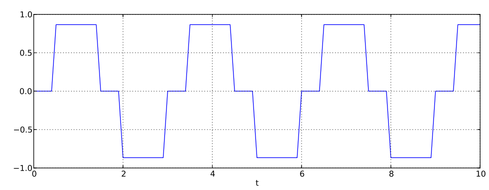




4. 2 Quantification

Le pas de quantification est associé au nombre de bits de codage. Pour 8 bits, on a $2^8 = 256$ valeurs possibles. $n = 8$ et $V_{ref} = 10V$ alors $P = 10/256 = 39mV$.





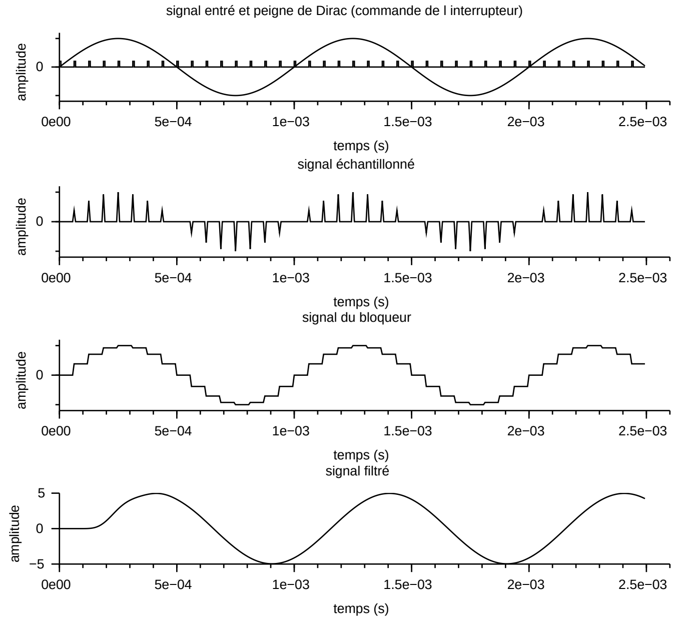
On a vu que n élevé permet d'approximer plus facilement le signal analogique

Les inconvénients d'un n élevé sont :

– la mémorisation prendra plus d'emplacements mémoire
– le système est plus sensible aux parasites électriques puisque le pas est plus faible.

4. 3 **Le filtrage passe-bas comme retour au signal**

En résumé, on cherche cette suite de signaux :



4. 4 **CAN, cas des boitiers d'acquisition**

Nous verrons en TP les limites et réglages des boitiers comme Orphy GTI et GTS.

4. 5 **Cas de l'oscilloscope numérique**

Les remarques précédentes permettent de comprendre que le fait de vouloir zoomer sur un intervalle de fréquence est la cause possible d'un repliement de spectre

5. Traitement numérique : filtrage

5. 1 **Principe** On a besoin comme dans le cas des signaux analogiques de filtrer : modification du spectre de Fourier, opération mathématique, ...

Dans le cas numérique, on a les mêmes besoins, et c'est le calcul sur la série de données issues de la numérisation qui va être nécessaire.

5. 2 **Passage à l'équation aux différences**

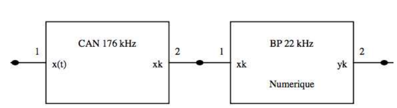
On part de l'équation différentielle associée au montage correspondant au filtre voulu.

La tension d'entrée échantillonnée est une suite discrète de données e_k. Au "même" instant, on aura une sortie s_k et on veut calculer la sortie s_{k+1}.

Dans l'équation différentielle, une dérivée $\dfrac{ds}{dt}$ sera $\dfrac{s_{k+1}-s_k}{T_e}$ comme déjà vu avec la méthode d'Euler.

5. 3 **Cas du filtre numérique passe-bas**

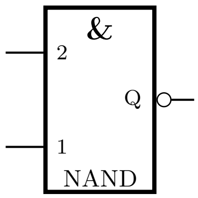
Un filtre passe-bas analogique est noté par sa fonction de transfert $H = \dfrac{1}{1+j\omega\tau}$ qui correspond à l'équation différentielle $\tau\dfrac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$.



On a donc $s_{k+1} = s_k + 2\pi f T_e (e_k - s_k)$

6. Cas particulier des portes logiques, application aux oscillateurs

6. 1 Portes logiques



6. 2 Intérêt d'un signal d'horloge pour les circuits numériques

6. 3 Oscillateur à porte logique

6. 4 Oscillateur à quartz