1. Introduction

Nous abordons ici une analyse et une représentation commune avec le cours de S.I.I.

Il s'agit de décrire schématiquement, mais aussi avec les équations différentielles descriptives, un système linéaire ainsi que sa stabilité.

Exercice 1: Equations différentielles, stabilité

1. 1 Retrouvez l'expression de l'équation différentielle d'un système à partir de l'équation reliant les tensions u_s et u_e selon : $u_s + j\omega\tau u_s = K.e$

1. 2 Quand un système est qualifié d'instable, pourquoi la tension de sortie u_s ne diverge finalement pas ?

.

2. Généralités sur les systèmes linéaires

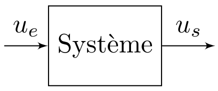
2. 1 Définitions

Un système linéaire est un système pour lequel les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles à coefficients constants. Les systèmes linéaires se caractérisent principalement par deux propriétés, la proportionnalité et l'additivité.

En résumé, un système linéaire vérifie le principe de "superposition", donc toute combinaison linéaire de solutions est aussi solution.

Proportionnalité :

en régime permanent (hors régime transitoire), le signal de sortie est **proportionnel** au signal d'entrée.



Exercice 2: Réponse linéaire

Rappeler le tracé de $u_s(t)$ pour un $u_e(t)$ constant appliqué à l'entrée d'un système RC, ainsi que le spectre de Fourier associé.

.

Ainsi, si la réponse à u_e est u_s,

alors la réponse à $\lambda.u_e$ est $\lambda.u_s$.

La réponse, en régime permanent ("définitif"), d'un système linéaire à une entrée donnée est un signal de même nature que l'entrée. Ainsi, si le signal d'entrée u_e est sinusoïdal, le signal de sortie u_s sera sinusoïdal en régime permanent (mais souvent déphasé).

? Exercice 3: Réponse non linéaire

Tracer des exemples de réponses non linéaires à un signal sinusoïdal par exemple.

.

Additivité :
Si v_1 est la réponse à u_1, si v_2 est la réponse à u_2, un système linéaire va rendre une réponse $v_1 + v_2$ pour une entrée $u_1 + u_2$.

? Exercice 4: Impact de ces propriétés

Quel est l'effet d'un filtre linéaire sur un signal d'entrée dont le spectre de Fourier est
$u(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots + \frac{1}{2p+1}\sin(2p+1)\omega t + \cdots\right)$?

.

? Exercice 5: Impact de ces propriétés

Quel est l'effet d'un filtre sur un signal d'entrée de la forme $u(t) = U\sin\omega t$, sachant que ce filtre élève au carré le signal d'entrée ?

.

2. 2 Causes de non-linéarité

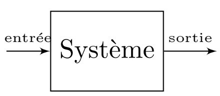
Seuil : cas classique des diodes

Saturation : cas classique des montages A.L.I.

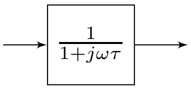
Hysteresis : cas classique avec des montages "bascule" ou avec les transformateurs

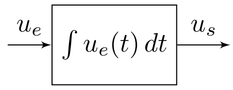
2. 3 Représentation des systèmes linéaires

On utilise des schémas blocs :

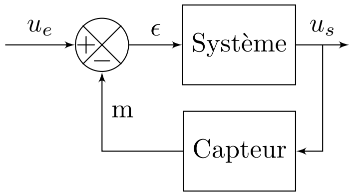


Chaque bloc comporte l'indication correspondant à l'opération réalisée, souvent sous la forme d'une inotation mathématique ou d'une fonction de transfert :





On a souvent besoin de blocs sommateurs ou de blocs comparateurs.
Les comparateurs sont représentés par un bloc en cercle $+/-$ comme suit dans ce schéma composé, où $\epsilon = u_e - m$:



2. 4 Equation différentielle associée

On utilise la représentation complexe pour les signaux sinusoïdaux, ou la représentation de Laplace.
La relation générale qui relie u_e et u_s est de la forme, avec $p \leq n$:

$$\boxed{a_0 u_e + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i u_e}{dt^i} = b_0 u_s + \sum_{j=1}^{p} b_j \frac{d^j u_s}{dt^j}}$$

Nous ne savons résoudre dans le cas général que les équations différentielles du premier et du second ordre et dans quelques cas particuliers des équations d'ordre supérieur.

? Exercice 6: Cas d'un circuit RC

Prenons l'exemple d'un circuit RC soumis à une tension $u_e = U \cos \omega t$.
Pour une tension prise aux bornes de C,
la loi des mailles donne :
$u_s = u_C = \frac{q}{C}$ et $u_e = R.i(t) + \frac{q(t)}{C} = RC\frac{du_C}{dt} + u_C(t)$.
Comment cette équation permet d'aboutir à la fonction de transfert :
$H(j\omega) = \dfrac{u_s}{u_e} = \dfrac{1}{1 + j.R.C.\omega}$

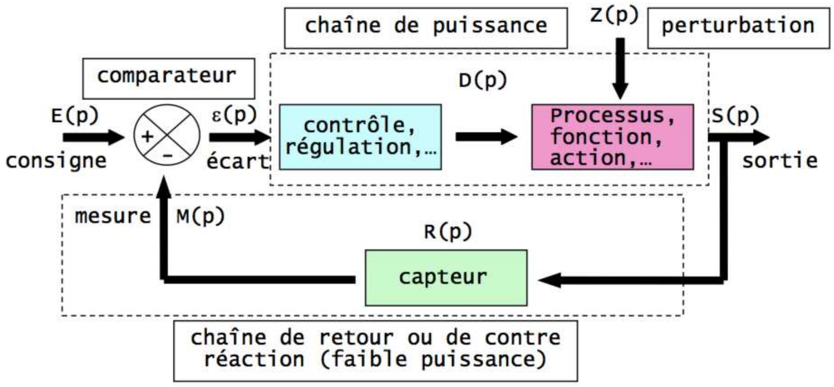
.

Lorsqu'on utilise la notation de Laplace, on écrit :
$H(p) = \dfrac{1}{1 + R.C.p}$.

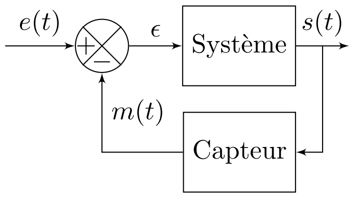
3. Systèmes linéaires bouclés

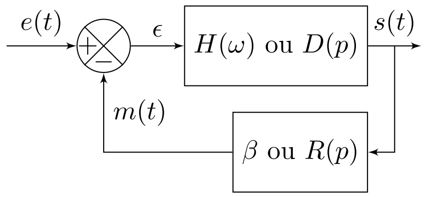
Un système est dit bouclé dès lors que l'on prend en compte en permanence l'état réel du système, observé à sa sortie. On adapte alors l'entrée en fonction de la grandeur mesurée. Un capteur donne une image de la sortie que l'on doit comparer à la grandeur de consigne.

Un système asservi est un système à boucle fermée (closed loop system, followed system) que l'on peut décrire par le schéma général suivant :



Sur ce schéma général, on note : $D(p)$ la fonction de transfert de la chaîne directe (chaîne de puissance contenant amplificateurs et actionneurs, assurant le processus ou la fonction du système), $R(p)$ la fonction de transfert de la chaîne de retour, ou de rétroaction. On désigne par : $e(t)$, le signal d'entrée ou consigne, et son image complexe $E(p)$, $\epsilon(t)$ l'écart ou l'erreur, et son image complexe $\epsilon(p)$, $s(t)$ le signal de sortie, et son image complexe $S(p)$, $m(t)$, le signal de mesure (en sortie de la chaîne de retour, réinjecté au niveau du comparateur), et son image complexe $M(p)$.





? Exercice 7: Système bouclé

Comment s'écrivent les tensions $m(t)$ et $s(t)$ en fonction des relations implicites des schémas ci-dessus ?

.

4. Stabilité des systèmes linéaires

4. 1 **Cas d'un système d'ordre 1**

On a une équation différentielle associée qui s'écrit sous la forme :

$\boxed{s(t) + \tau \dfrac{ds}{dt} = e(t)}$.

Le comportement stable ou instable peut se conclure sur l'étude du régime libre, qui vérifie $s(t) + \tau \dfrac{ds}{dt} = 0$. La solution de cette équation différentielle est $s(t) = K.e^{-t/\tau}$.

La solution générale est donc $s(t) = K.e^{-t/\tau} + s_{RP}$. On voit donc que si $\tau > 0$, la solution est stable, alors que si $\boxed{\tau < 0, \text{ la solution diverge}}$ donc le système est alors instable.

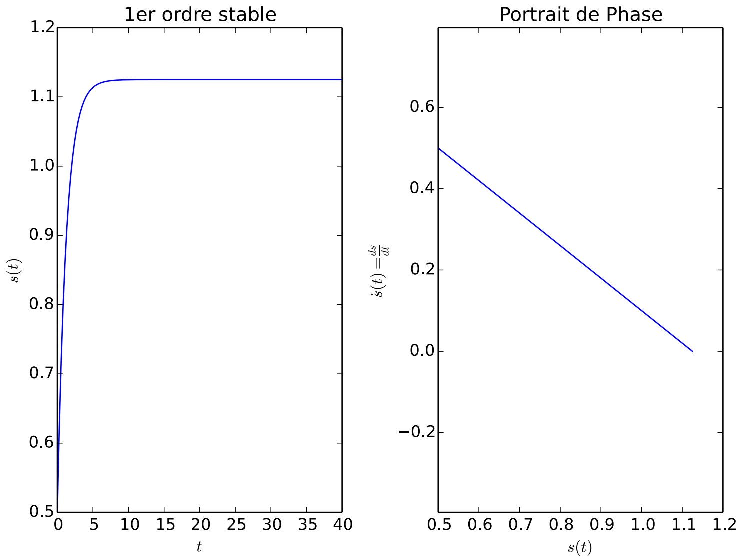
4. 2 Notion de portrait de phase et application à l'étude de la stabilité

On peut utiliser la notion de portrait de phase : il s'agit de tracer $\frac{ds}{dt}$ en fonction de $s(t)$.

Utilisation du portrait de phase

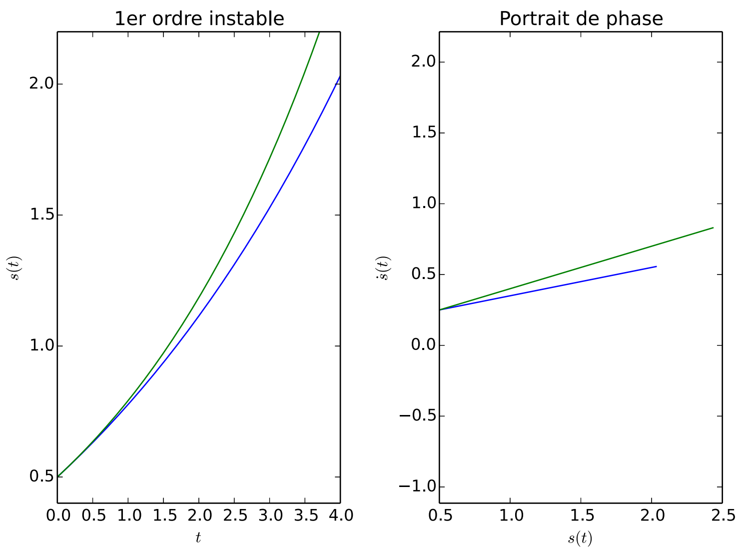
En régime libre stable, le point particulier des coordonnées ($\dot{s} = 0, s = s_0$) est un point attracteur. En régime forcé stable, l'attracteur est une courbe fermée.

Pour un système d'ordre 1, le point attracteur en régime libre correspond donc à $\dot{s} = 0$ et on a le tracé suivant pour $\tau > 0$:



Repérez les conditions initiales et le sens de déplacement sur les graphiques.

Pour un système d'ordre 1 **instable**, on a un tracé comme les deux cas suivants :



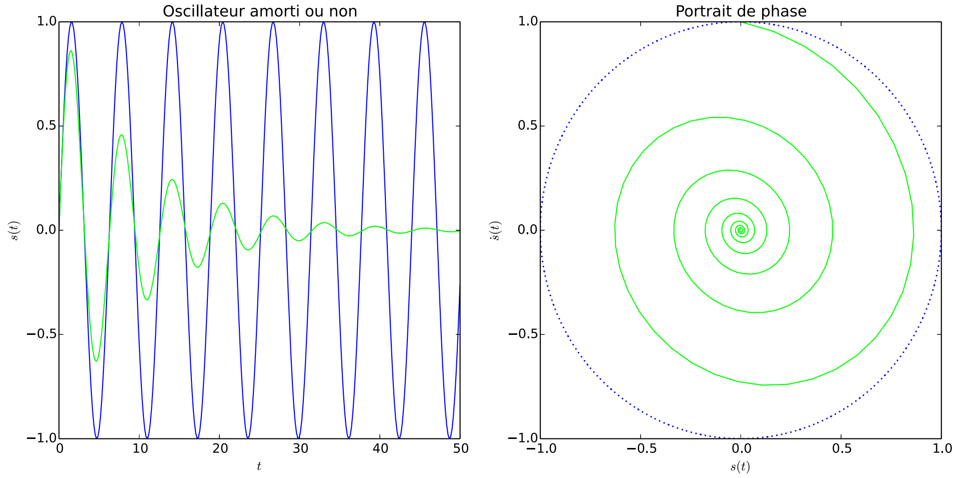
Ces cas correspondent à $\tau < 0$.

Repérez les conditions initiales et le sens de déplacement sur les graphiques.

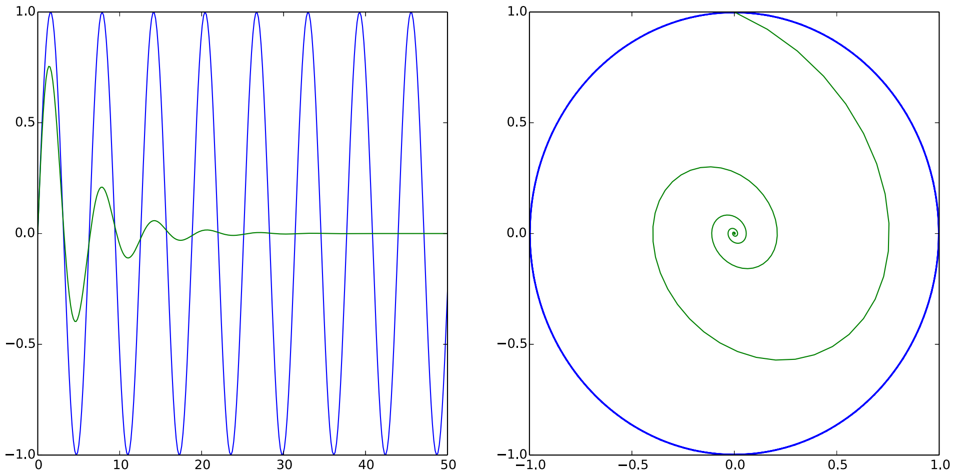
4. 3 Cas d'un $\boxed{\text{système d'ordre 2}}$, cas général et utilisation du portrait de phase

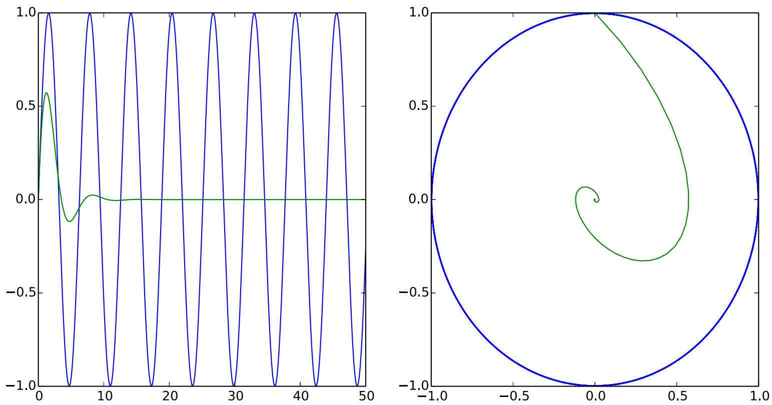
On veut analyser un système caractérisé par l'équation différentielle $\dfrac{d^2s}{dt^2} + \alpha\dfrac{ds}{dt} + \beta s(t) = 0$ dans le cas du régime libre.

Cas $\alpha = 0$, $\beta = \omega_0^2 > 0$ et également $\alpha > 0$, $\beta = \omega_0^2 > 0$.

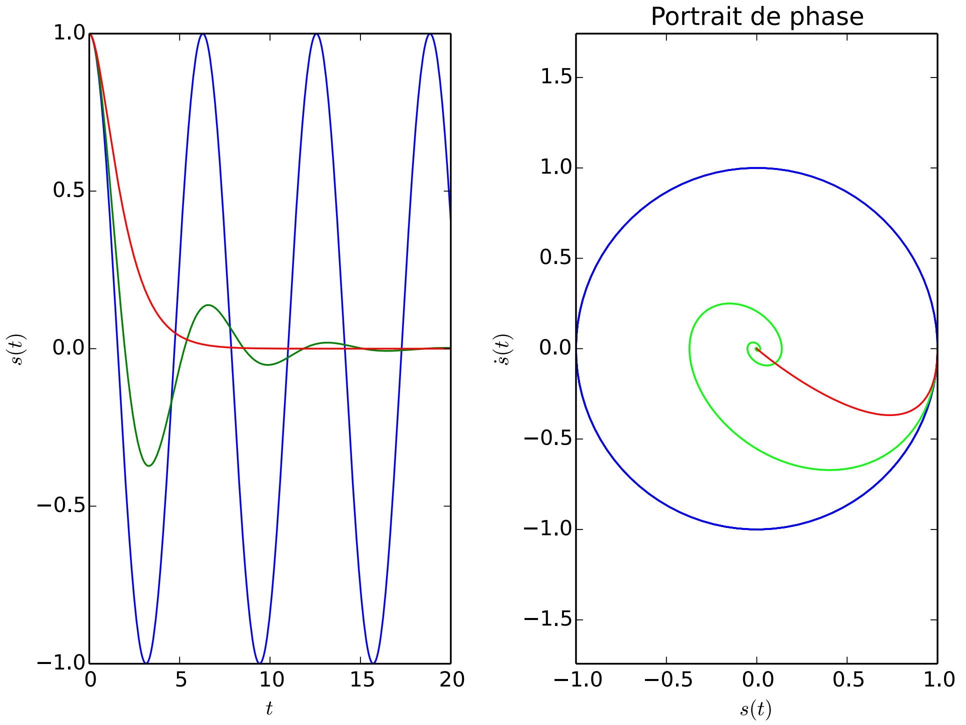


✍ Décrire les particularités des tracés



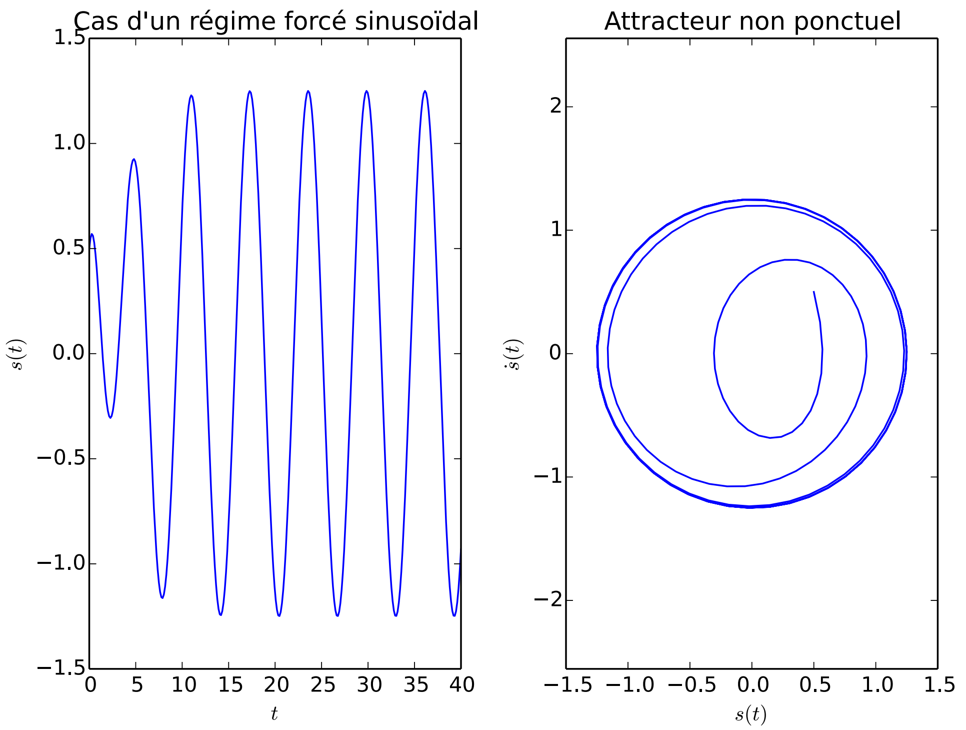


Résumé des cas périodique, pseudo-périodique et apériodique :

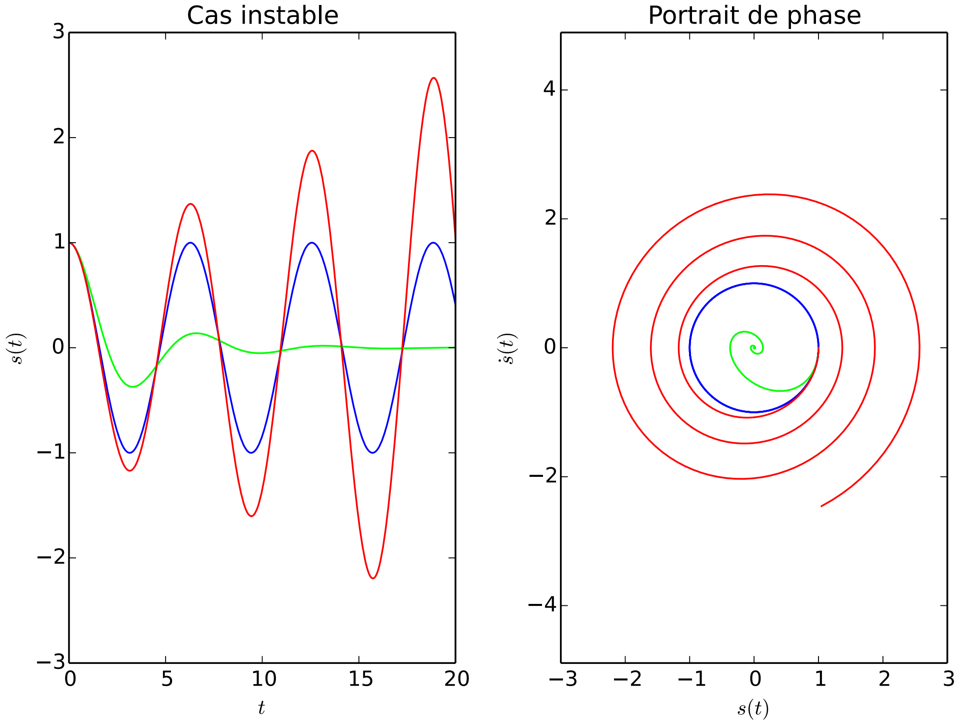


On veut analyser un système caractérisé par l'équation différentielle $\frac{d^2s}{dt^2} + \alpha\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = e(t)$ dans le cas du régime forcé, par exemple avec un cas sinusoïdal $e(t) = E\cos\omega t$. On obtient alors dans le cas stable un attracteur qui n'est plus un point.

Décrire les particularités des tracés, ainsi que les conditions initiales.



On peut ajouter un cas instable, ou bien $\beta < 0$ quel que soit le signe de α, ou bien le cas $\alpha < 0$ pour $\beta > 0$:



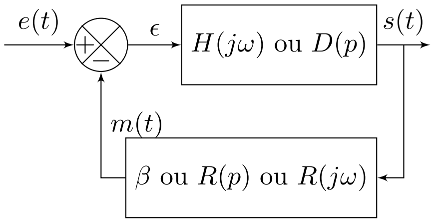
La fonction caractéristique associée à l'équation différentielle est $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ en posant $s(t) = Se^{r.t}$.

Une équation différentielle $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ correspond à une solution stable si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

5. Notion de rétroaction

5. 1 Généralités

On écrit les fonctions de transfert des différentes parties $H(p)$ ou $H(j\omega)$ en fonction du cas étudié, respectivement une réponse à un échelon temporel, ou une réponse à une forme harmonique. Le schéma fonctionnel permet de déterminer les termes : fonction de transfert de la chaîne directe, fonction de transfert en boucle ouverte ou fonction de transfert en boucle fermée.

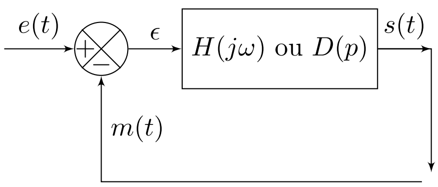


- fonction de transfert de la chaîne directe : $D(p)$ ou $D(j\omega)$
- fonction de transfert en boucle ouverte : c'est $\dfrac{m}{\epsilon}$ donc on a $m = R \times D \times \epsilon$ qui donne une fonction de transfert en B.O. égale à $R \times D$
- fonction de transfert en boucle fermée : il s'agit de $\dfrac{s}{e}$ ce qui donne ici $\dfrac{D}{1 + D.R}$.
- cas particulier du "retour unitaire" : il s'agit du cas $R = 1$

5. 2 Intérêt de la rétroaction (bouclage)

Pour un montage avec D seul sans rétroaction, on a $s = D \times e$ donc une variation de 10% sur D donne une variation de 10% sur s.

Dans le cas d'un retour unitaire, on a :



On a ici $\dfrac{s}{e} = \dfrac{D}{1 + D}$. Si l'on ajoute une hypothèse $D \gg 1$ pour un gain utilisé important, on a la simplification $\dfrac{ds}{s} = \dfrac{dD}{(1+D)^2}\dfrac{1+D}{D} = \dfrac{dD}{D}\dfrac{1}{1+D}$ ce qui donne $\boxed{\dfrac{ds}{s} \approx \dfrac{dD}{D^2} \text{ pour } D \gg 1}$.

Dans le cas où $D \neq 1$, on a une fonction de transfert en boucle fermée qui est $\boxed{\dfrac{s}{e} = \dfrac{D}{1 + D.R} \approx \dfrac{1}{R} \text{ quand } D \gg 1}$, ce qui revient à dire le gain ne dépend que de la boucle de rétroaction, ce qui est totalement indépendant des variations possibles du gain direct D.

5. 3 $\boxed{\text{Stabilité du système bouclé}}$

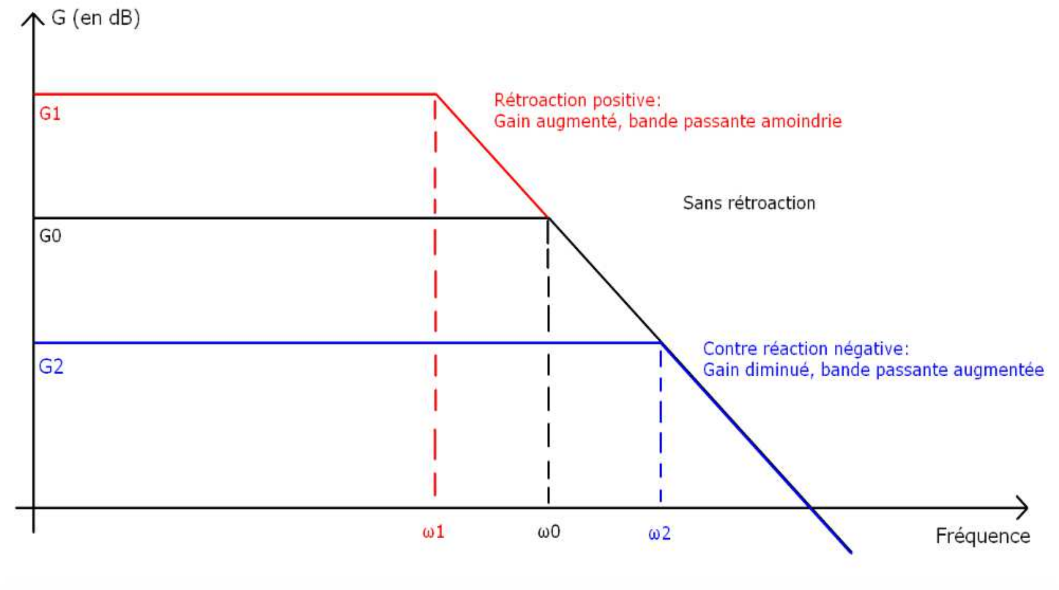
Comme $\dfrac{s}{e} = H_p = \dfrac{D}{1 + D.R}$, il faut que les racines (qui l'annulent) de $1 + D.R$ aient une partie réelle négative.

En supposant que le cas d'un filtre passe-bas rétro-actionné, $D = \dfrac{D_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$, et on montre que le gain est $\boxed{H_{p_0} = \dfrac{D_0}{1 + D_0 R}}$ et que, suivant le type de rétroaction, positive ou négative, sera plus grand ou moins grand que le gain original.

De plus, la pulsation de coupure devient $\boxed{\omega_{p_0} = \omega_0\,(1 + D_0 R)}$.

Cette pulsation de coupure sera plus grande dans le cas d'une rétroaction négative (donc la bande passante est agrandie) ou plus faible dans le cas d'une rétroaction positive (la bande passante est diminuée).

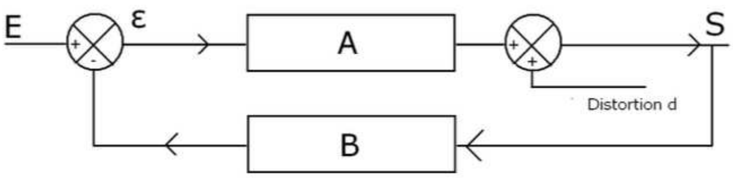
Une rétroaction positive augmente le gain mais diminue la bande-passante.
Une rétroaction négative diminue le gain mais augmente la bande-passante.



5. 4 Aspect temporel

La rétroaction transforme le temps de réponse τ lié à l'équation différentielle d'un système D du 1er ordre $\boxed{\tau\dfrac{ds}{dt} + s(t) = D_0\epsilon(t)}$. En tenant compte de la chaine bouclée, on obtient $\dfrac{\tau}{1+R_0D_0}\dfrac{ds}{dt} + s(t) = \dfrac{D_0}{1+R_0D_0}e(t)$ dont le temps caractéristique de réponse est $\dfrac{\tau}{1+R_0D_0} \ll \tau$ donc le système devient plus rapide.

5. 5 Influence d'une perturbation



Exercice 8: conséquence d'une rétroaction sur la distortion inhérente à l'ampli

Montrer qu'avec une rétroaction négative, la distortion diminue.

.

remarque : dans les amplis pour guitare, où la distortion est recherchée, il faut donc faire attention à ne pas mettre trop de contre-réaction ou alors le son sortant de l'ampli sera très déformé.