

1. Introduction

En première année, vous avez vu les théorèmes fondamentaux ainsi que la notion de filtrage d'un signal associé à la notion de spectre de Fourier. Nous allons replacer tout ceci dans le contexte de l'électronique de PSI.

Utilisation du programme de Sup

Nous allons utiliser en parallèle le document du programme de PCSI, où les parties non traitées en MPSI seront précisées, afin de montrer que quelques exemples vont suffire pour faire une révision globale de ce qui a été vu en électricité en première année... et le but des chapitres de cette année.

loi d'Ohm \rightarrow théorèmes \rightarrow filtres \rightarrow spectre de Fourier

Filtres :

2. Généralités sur les théorèmes généraux

2.1 Dipôles

Les dipôles linéaires classiques sont :

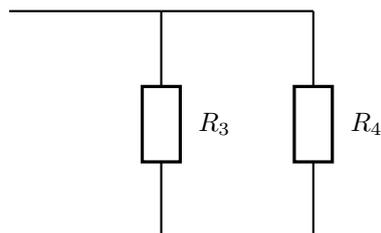
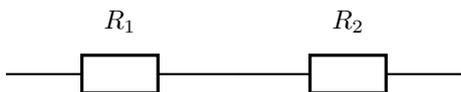
- résistance, impédance R avec $U_R = R.i_R$ - condensateur, impédance $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$ avec $U_C = Z_C.i_C$
- bobine, impédance $Z_L = jL\omega$ avec $U_L = Z_L.i_L$

? Exercice 1: notation complexe

- (a) Retrouvez les expressions des impédances Z_L et Z_C à partir des définitions de $u_L(t)$ et $u_C(t)$
- (b) Quelle est la dimension de $\frac{RL}{C}$?

2.2 Associations de dipôles

Associations série et parallèle :

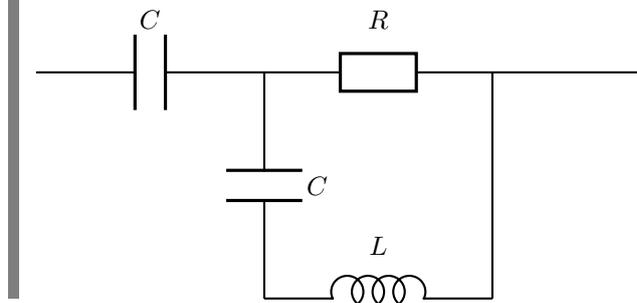


Dans le cas d'une association série de résistances, le dipôle équivalent entre les deux bornes extrêmes est $R_{tot} = R_1 + R_2$. Avec des impédances quelconques Z_1 et Z_2 , on généralise à $Z_{tot} = Z_1 + Z_2$.

Dans le cas d'une association parallèle de résistances, le dipôle équivalent entre les deux bornes extrêmes est $R_{tot} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. Avec des impédances quelconques Z_1 et Z_2 , on généralise à $Z_{tot} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

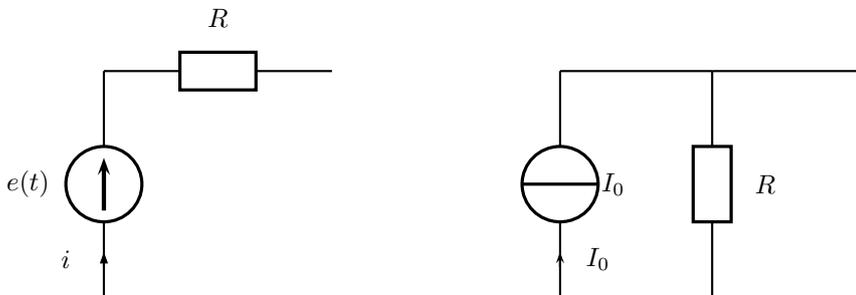
? Exercice 2: Associations

Exprimer l'impédance totale Z du dipôle.



2.3 Représentation de Thévenin ou de Norton : pour information

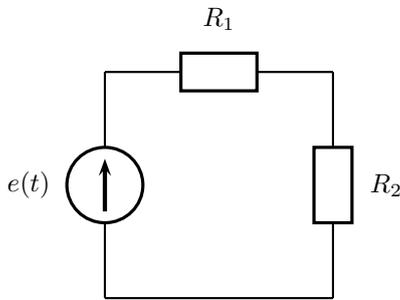
Une équivalence bien utile pour la simplification de l'étude d'un circuit existe entre un générateur de tension de Thévenin (générateur idéal de tension en série avec une résistance) et un générateur de courant de Norton (générateur idéal de courant en parallèle avec une résistance).



Pour passer d'une représentation à l'autre, on montre que l'on a simplement $I_0 = \frac{e}{R}$ ou $e = R \cdot I_0$ selon le sens de la transformation.



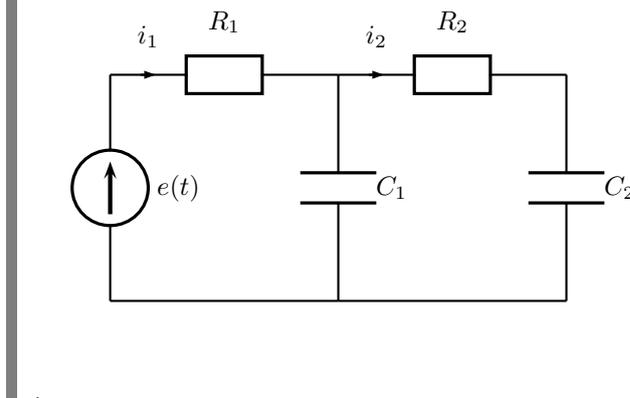
Application des théorèmes : simplification des montages et de la résolution

2. 4 **Diviseur de tension** : cas très important et très utile

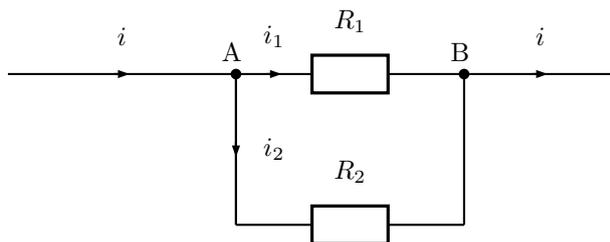
☞ Dans le cas d'un diviseur de tension, la relation entre U_{R_2} et e est $U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times e$. Avec des impédances quelconques Z_1 et Z_2 , on généralise à $U_{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \times e$

? Exercice 3: ☞ Piège du diviseur de tension mal utilisé : cas de deux RC qui se "suivent".

Exprimer la tension de "sortie" u_{C_2} en fonction de e

2. 5 **Diviseur de courant** cas très important et très utile

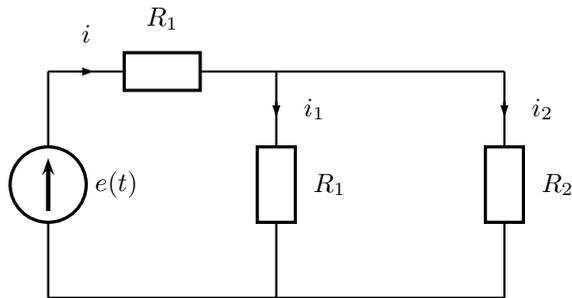
Il s'agit d'exprimer la relation existant entre les courants de deux branches parallèles et le courant arrivant au noeud de ce circuit.



On a $i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$ ainsi que $i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$. Si les deux dipôles sont représentés par leurs impédances Z_1 et Z_2 , on écrira par exemple $i_1 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} i$

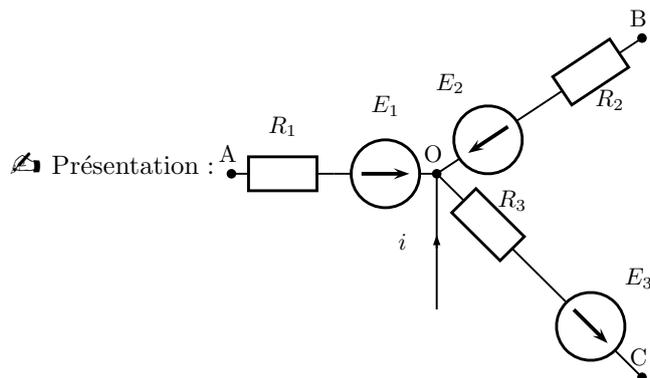
? Exercice 4: Utilisation du diviseur de courant

On considère le circuit suivant. Montrer que l'on peut en déduire rapidement le courant circulant dans R_1 .



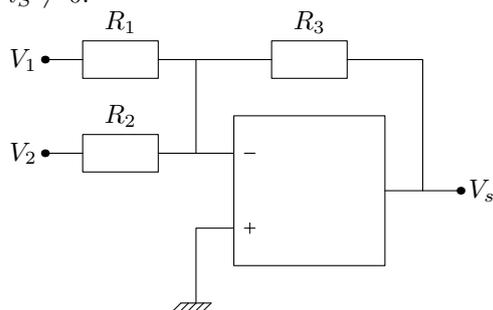
2.6 Théorème de Millmann : pour information

☞ Un théorème qui est un "couteau Suisse" pour l'étude des circuits : le théorème de Millmann. Il permet d'exprimer le potentiel en un point d'un circuit en fonction des potentiels des noeuds voisins.



? Exercice 5: Application aux montages à A.L.I

On prendra l'habitude d'appliquer une "loi des noeuds" pour trouver rapidement les relations entre les tensions d'un montage à A.L.I. (voir prochains cours et TP) dans ce type de montage, en fonctionnement dit "linéaire", $\epsilon = V_{\oplus} - V_{\ominus} = 0$ avec $i_{\oplus} = i_{\ominus} \approx 0$, mais $i_S \neq 0$.



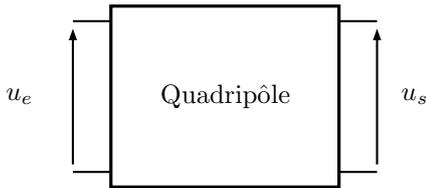
Exprimer la tension de sortie V_S en fonction des deux tensions d'entrée V_1 et V_2 .

3. Etude des filtres passifs

3.1 Présentation générale

Un quadripôle est une association de dipôles passifs et/ou de sources liées ou non.

Un quadripôle passif est une association de dipôles passifs et/ou de sources liées. Le schéma d'un quadripôle comporte quatre bornes (deux pour la tension "d'entrée", deux pour la tension de "sortie")



Le but de l'étude préliminaire va être de formaliser les relations existant entre les tension et intensité à l'entrée et à la sortie d'un quadripôle. L'écriture la plus générale peut donc prendre par exemple la forme : $H = \frac{v_s}{v_e}$ pour la fonction de transfert en tension entre l'entrée et la sortie. C'est le cas le plus utilisé.

La notion complexe est utilisée grandement partout dans les chapitres d'électricité.

Ainsi, si $v_e(t) = V_e \cos \omega t$ et $v_s(t) = V_s \cos(\omega t + \varphi)$, alors $v_e(t)$ est noté $v_e = V_e e^{j\omega t}$ avec $j^2 = -1$.

La fonction de transfert s'écrit donc $H = \frac{V_s}{V_e} e^{j\varphi}$ donc l'argument de H est le déphasage entre v_s et v_e .

Mais, au delà de la simple étude des intensité et tension, le comportement du quadripôle peut être globalement étudié au travers de quatre grandeurs : le gain en intensité, le gain en tension, la transimpédance et la transadmittance. En fait, seul le gain en tension sera développé dans ce chapitre.

Remarque : on définit également la "fonction de transfert statique" H_0 la limite de H en basse fréquence. On peut donc retenir que $H_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} H$

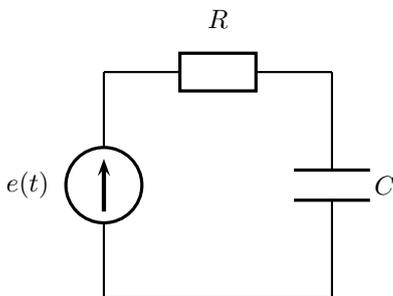
3.2 Etude en $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$

Notons que l'on peut procéder à l'étude rapide du comportement d'un filtre passif.

3.3 Notation générale

L'étude de H va porter sur ω . On notera donc souvent la fonction sous la forme $H(\omega)$ voire $H(j\omega)$. Néanmoins, pour faire le lien avec le cours de S.I., on pourra tout aussi bien adopter la notation $H(p)$ où $p = j\omega$ ou $p = j\omega/\omega_0$.

3.4 Cas du filtre passe-bas RC



On remarque que le même courant circule dans R et C : nous avons donc un diviseur de tension.

On a comme fonction de transfert $H = \frac{v_C}{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$



Code Python

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import matplotlib.pyplot as plot
import numpy as np
import math
R1=1000; C1=1.*10**(-6)

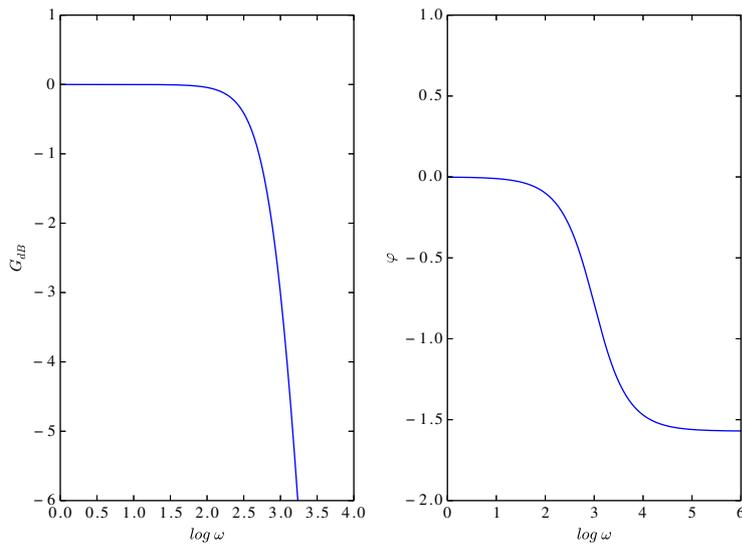
def Arg(z):
    return(math.atan2(z.imag,z.real))
def H(omega):
    return ((1)/(1+1j*R1*C1*omega))
```

```

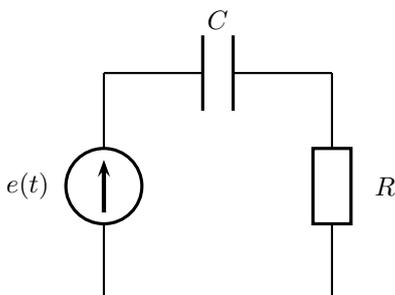
log_omega=np.linspace(-2,10,1000)
omega=np.power(10,log_omega)
GdB=20*np.log10(np.abs(H(omega)))
plt.figure(1)
plt.subplot(121)
plot.plot(log_omega,GdB)
plot.axis([0,4,-6,1])
plot.xlabel(r'$\log \omega$')
plot.ylabel(r'$G_{dB}$')

phi=list(map(Arg,H(omega)))
plt.subplot(122)
plot.plot(log_omega,phi)
plot.axis([0,6,-2,1])
plot.xlabel(r'$\log \omega$')
plot.ylabel(r'$\varphi$')
plt.tight_layout() # pour bien espacer les tracés
plot.show()

```



3.5 Cas du filtre passe-haut RC



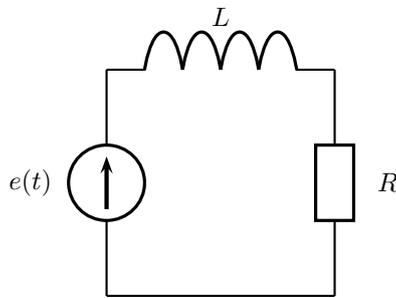
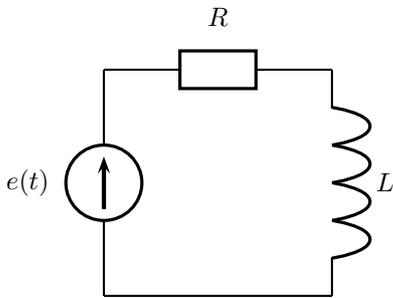
? Exercice 6: Filtre passe-haut RC

Exprimer la fonction de transfert $H(j\omega)$ et tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique. Ajouter le tracé réel.

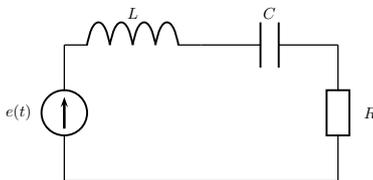
Quelle est l'opération mathématique réalisée à basse fréquence ?

Quelle est l'équation différentielle équivalente à la fonction de transfert ?

3.6 Cas des filtres RL

**? Exercice 7: Filtres RL**

Exprimer la fonction de transfert $H(j\omega)$ et tracer l'allure du diagramme de Bode asymptotique. Ajouter le tracé réel.

3.7 Cas du filtre RLC série, tension de sortie aux bornes de R : résonance d'intensité

En étudiant la tension de sortie aux bornes de R , avec e la tension d'entrée, on peut écrire que

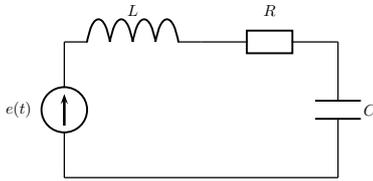
$$u_R = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} e.$$

Cette tension complexe peut être décomposée en son amplitude :

$$U_{R,max} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} E_{max}$$

et sa phase φ_R vérifiant :

$$\tan \varphi_R = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ avec } \cos \varphi_R > 0.$$

3. 8 Cas du filtre RLC série, tension de sortie aux bornes de C : résonance de tension

En étudiant la tension de sortie aux bornes de C , avec e la tension d'entrée, on peut écrire que

$$u_C = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} e = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} e.$$

Cette tension complexe peut être décomposée en son amplitude :

$$U_{C,max} = \frac{1}{\sqrt{(RC\omega)^2 + (1 - LC\omega^2)^2}} E_{max}$$

et sa phase φ_C vérifiant :

$$\tan \varphi_C = -\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \text{ avec } \sin \varphi_C < 0.$$

3. 9 Cas du filtre RLC série, tension de sortie aux bornes de L

En étudiant la tension de sortie aux bornes de L , avec e la tension d'entrée, on peut écrire que

$$u_L = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} e.$$

? Exercice 8: Comportement du filtre

En utilisant la fonction de transfert, expliquer le comportement fréquentiel de ce filtre

3. 10 Cas du filtre RLC parallèle

? Exercice 9: Comportement du filtre

En utilisant la fonction de transfert **en courant**, expliquer le comportement fréquentiel de ce filtre. C'est ce qu'on appelle parfois un "filtre bouchon"

3. 11 Cas du filtre RLC série, tension de sortie aux bornes de L et C

C'est un filtre "réjecteur" ou "coupe-bande".

$$u_{LC} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} e.$$

? Exercice 10: Comportement du filtre

En utilisant la fonction de transfert, expliquer le comportement fréquentiel de ce filtre

4. Analyse spectrale

4.1 Notion de décomposition spectrale

Soit $u(t)$ une fonction périodique de période T , de pulsation $\omega = 2\pi/T$. Si u est suffisamment régulière, elle peut se décomposer en une somme de sinus et cosinus :

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + \frac{1}{2} b_n \sin n\omega t \right)$$

☞ C'est le développement en série de Fourier de u .

☞ Les coefficients a_n et b_n pour $n > 1$ sont les harmoniques de rang n .

Les coefficients a_1 et b_1 sont les termes "fondamentaux".

Ils s'obtiennent par les formules :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} u(t) \sin n\omega t dt, \quad n \geq 0$$

où α est un nombre réel quelconque, les intégrales pouvant être calculées sur un intervalle quelconque d'amplitude T . En pratique α est choisi de manière à simplifier le calcul, par exemple $\alpha = 0$.

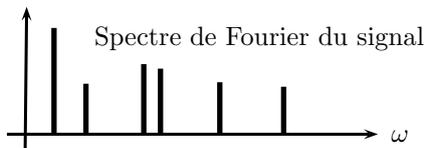
Propriétés

* Le terme $a_0/2$ représente la valeur moyenne de u .

* Si u est paire alors $b_n = 0$. Si u est impaire alors $a_n = 0$.

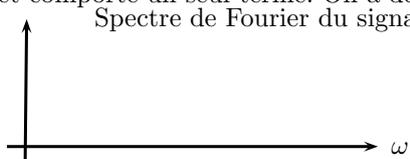
Décomposition spectrale

On trace ensuite les coefficients a_n et b_n en fonction de ω .



4.2 Exemple du signal sinusoïdal

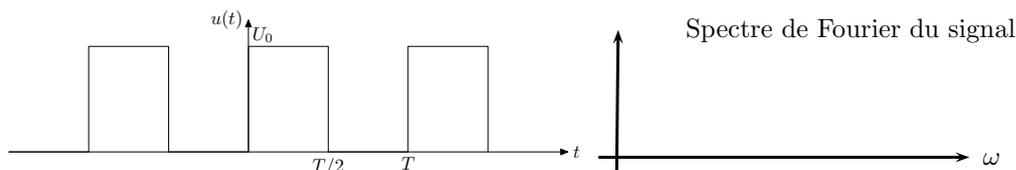
Dans le cas d'un signal sinusoïdal $u(t) = U \cos \omega t$ par exemple, la décomposition de Fourier est immédiate et comporte un seul terme. On a donc un seul pic dans le spectre de Fourier en ω .



4.3 Exemple du signal créneau

On parle de "fonction carrée"

On considère la fonction "carrée" de période T représentée sur la figure suivante.



Calculer les coefficients a_n et b_n du développement de u en série de Fourier.

Le développement de u est :

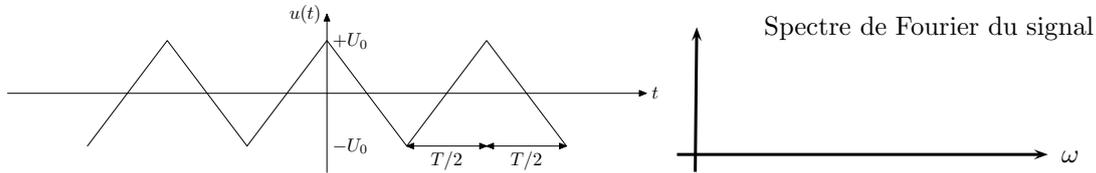
$$u(t) = \frac{U_0}{2} + \frac{2U_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots + \frac{1}{2p+1} \sin (2p+1)\omega t + \dots \right)$$



☞ Et si le signal carré était compris entre $-\frac{U}{2}$ et $+\frac{U}{2}$?

4.4 Exemple du signal triangulaire

On considère à présent la fonction “triangle” de période T .



Calcul des coefficients a_n et b_n :

Le développement de u :

$$u(t) = \frac{8U_0}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos 3\omega t + \frac{1}{5^2} \cos 5\omega t + \dots + \frac{1}{(2p+1)^2} \cos (2p+1)\omega t + \dots \right)$$

Sur un graphe le spectre de u , on voit :

- ici encore, la décroissance des coefficients a_n permet d'obtenir une valeur approchée de u à l'aide des premiers termes du développement.
- on peut aussi remarquer que la décroissance des a_n est plus rapide que celle des b_n de l'exemple précédent. Ceci est lié au fait que la convergence de la série de Fourier est plus rapide lorsque la fonction est continue que lorsqu'elle présente des discontinuités.

4.5 Remarques importantes

☞ Valeur moyenne et valeur efficace d'un signal ? Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques ?



4.6 Notion d'enrichissement du spectre

L'utilisation de dipôles non-linéaires est la cause d'un enrichissement du spectre de Fourier du signal. Par exemple, le redressement mono-alternance d'un signal initialement sinusoïdal par une diode fait passer d'un spectre à un seul pic à un spectre discret mais infini.

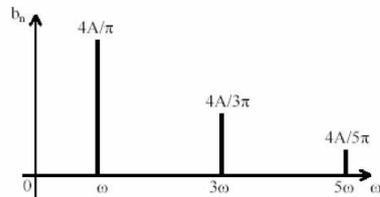
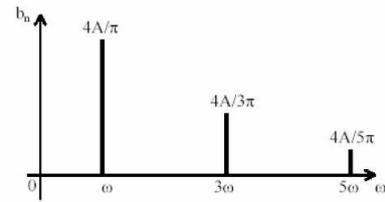
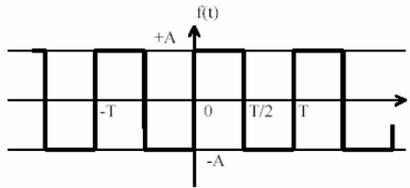


4.7 Effet d'un filtre sur un spectre

☞ C'est l'intérêt principal de la représentation de Fourier du spectre : on fait se superposer le spectre du signal avec le diagramme de Bode du filtre. Cela permet de savoir quelles fréquences vont être atténuées.

? Exercice 11: Spectres de Fourier

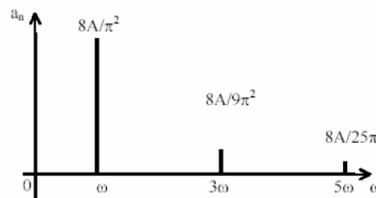
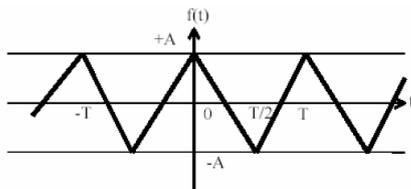
Quel est l'effet sur un signal "créneau" d'un filtre passe-bas? (selon la valeur de la pulsation de coupure ω_0 du filtre). La réponse est-elle modifiée si le signal $f(t)$ oscille entre 0 et $2A$? Pourquoi le développement en série de Fourier n'est composé que de "sinus" et pas de "cosinus"?



$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

? Exercice 12: Spectres de Fourier

Qu'a de particulier le développement en série de Fourier du signal "triangulaire"? Pourquoi les amplitudes des pics décroissent plus vite que pour le signal "créneau"?

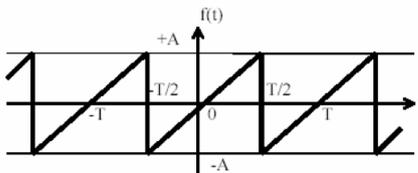


$$f(t) = \frac{8A}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{3^2} \cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2} \cos(5\omega t) + \dots \right) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

? Exercice 13: Spectres de Fourier

On considère le développement $f(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin(2\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) - \frac{1}{4} \sin(4\omega t) + \dots \right)$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$



Décrire le spectre de Fourier. .

? Exercice 14: Spectres de Fourier

On considère le développement $f(t) = \frac{2A}{\pi} + \frac{4A}{\pi} \left(\frac{1}{1 \times 3} \cos(2\omega t) - \frac{1}{3 \times 5} \cos(4\omega t) + \frac{1}{5 \times 7} \sin(6\omega t) + \dots \right)$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$ d'un signal "redressé double-alternance". Comment récupérer la valeur moyenne de $f(t)$?